

Reactie op "De Zes Talen van de Wiskunde"

R. Schöndorff

Globaal en lokaal

De bijdrage van Ten Hove en Vernooij "De zes talen van de wiskunde" (Tijdschrift, nr. 9, november 1986) roept bij mij een aantal vragen op. Vragen, die ik als mede-redactielid al naar voren heb gebracht voordat de publikatie plaats vond, doch die door een aantal misverstanden op organisatorisch gebied de auteurs niet of slechts ten dele hebben bereikt.

Ten eerste vragen de terminologie betreffende. In de wiskunde worden de termen 'globaal' en 'lokaal' gehanteerd in verband met het onderscheiden van lokale en globale optima. Het globale optimum is het optimum optimorum. Het is dan nogal ongelukkig deze termen opnieuw te gaan definiëren, op zodanige wijze dat van 'lokale- en globale grafieken' gesproken kan worden. Het staat een ieder vrij zijn definities te kiezen, maar in een artikel dat juist beoogt zaken te verhelderen ligt de hier gekozen weg niet voor de hand. In het overzicht van geraadpleegde literatuur wordt verwezen naar een artikel 'Globaal of lokaal?' van de hand van H. Krabbendam (SLO, Enschede). Hierin blijkt de term globaal te worden gehanteerd in de zin van 'globale kenmerken' van een grafiek, zoals verloop toename, afname, constant blijven. Verder gaat het over 'globale inzichten' in de zin van 'niet nader gedetailleerd'. De 'globale grafiek' wordt door Krabbendam niet gedefinieerd.

Terug naar de bijdrage van ten Hove en Vernooij. Het tweede punt waarmee ik grote moeite heb, is een zin als: 'De theoretische veronderstelling van de marginalistische benadering is, dat bij voldoende grote aantallen een kostencurve de continuïteit benadert, zodanig dat differentiëren is toegestaan'. De getrainde Toonder/Bommel-lezer zal hier eerder een van de gedachtenspinsels van professor Prlwytszkofsky herkennen dan iets anders. Een kostencurve die de continuïteit benadert? Hoe gaat dat? En impliceert continuïteit dat differentiëren is toegestaan?

Differentiële- en marginale kosten

Ernstiger dan het bovenstaande is het fundamentele misverstand dat blijkt als we bij figuur 5 zijn aangekomen. Daar is vanuit een totale kostenfunctie op een tweetal manieren de 'marginale' kosten berekend. Ten eerste door de waarde 0 t/m 5 in de totale kosten (TK) functie in te vullen en de gevonden TK-waarden in een tabel te zetten. De 'marginale' kosten worden vervolgens bepaald als toene-

ming van de TK tussen 0 en 1, tussen 1 en 2 eenheden, enz. De tweede manier waarop de marginale kostenfunctie wordt bepaald is, door de TK-functie te differentiëren naar de geproduceerde hoeveelheid. En nu komt het: 'Frappant is dan te moeten constateren dat de marginale kosten berekend volgens de methode van differentiëren een geheel andere uitkomst oplevert, dan volgens de methode van tabellen afleiden uit andere tabellen. Ook hier blijkt dat leerlingen, zelfs als ze de vertaalvaardigheden goed beheersen nog in de problemen kunnen raken.' Einde citaat; vervolgens wordt verwezen naar een voetnoot waarin dezelfde problematiek in 1980 in het blad EMD door Vernooij is behandeld onder de titel: 'Het spel met de kortsluitingen'.

Ik geloof dat Ten Hove en Vernooij zich niet ongerust hoeven te maken over de moeilijkheden die VWO leerlingen in de 5e en/of 6e klas hier zullen hebben. Immers op dat niveau hebben ze ofwel in de wiskunde-les het differentiaal-quotiënt behandeld, of het verschil tussen differentiële kosten en marginale kosten is ze uitgelegd door hun economie-docent. Het door Ten Hove en Vernooij geschilderde probleem deed zich wel voor in de vroegere HBS-A klas, waar men niet had leren differentiëren en geen kennis had genomen van het limietbegrip. Dan ontmoette je het didactische probleem dat je de marginale kosten definieerde als de toeneming van de totale kosten als er 1 eenheid meer werd geproduceerd. Bij het rekenen moest je kiezen of je de MK-curve door bv 4 of 5 eenheden liet lopen en je koos dan 4,5. Hetzelfde doet zich nu bij HAVO-leerlingen voor. Van een kortsluiting is echter geen sprake, omdat de HAVO-leerling alleen met de 'tabel-benadering' werkt en de VWO-leerling geen moeite zal hebben met het verschil tussen deze benadering en die via differentiëren van de TK-functie. Definieert men de uitkomst die via de 'tabelbenadering' wordt gevonden als de 'differentiële kosten' $\Delta(TK)/\Delta q$ en de uitkomst die via het differentiëren van de TK-functie wordt gevonden als de 'marginale kosten', $d(TK)/dq$, zijnde de limiet van $\Delta(TK)/\Delta q$ voor Δq nadert tot 0, dan heeft een VWO-leerling geen centje pijn. Hij is dit probleem bij de wiskunde tegengekomen en eventueel bij natuurkunde. En als het in de economische context nog eens moet worden herhaald: wat is eenvoudiger dan een TK-functie op te schrijven, een bepaalde waarde van q te kiezen en vervolgens voor een aantal steeds kleinere waarden van Δq het quotiënt $\Delta(TK)/\Delta q$ te bekijken? Dit

quotiënt nadert tot een limiet, die we de marginale kosten bij de betreffende waarde van q noemen.

Op het gevaar af grote scharen lezers te beledigen, hieronder een voorbeeldje.

$TK = 1/4 q^2$ (voor $q \geq 0$). Kies als uitgangspunt $q = 2$.

Δq	$\Delta(TK)^*$	$\Delta(TK)/\Delta q$
100	2600	26
10	35	$3\frac{1}{2}$
6	15	$2\frac{1}{2}$
2	3	$1\frac{1}{2}$
1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$
$1/10$	$41/400$	$1\frac{1}{40}$
$1/100$	$401/40000$	$1\frac{1}{400}$

Het quotiënt $\Delta(TK)/\Delta q$ nadert, wanneer Δq nadert tot 0, tot een bepaalde waarde, zonder die waarde te bereiken. Men spreekt van de grenswaarde of limiet van het quotiënt. In dit geval de waarde 1. De marginale kosten bij $q=2$ bedragen 1.

Slotopmerking

In het bovenstaande is geprobeerd aan te tonen dat het nogal meevalt met al die talen van de wiskunde. Wanneer men begrippen geen andere dan de afgesproken inhouden geeft, is de taal van de wiskunde heel wel verstaanbaar. Wanneer men bestaande wiskundige begrippen zoals het differentiequotiënt, de limietwaarde en het differentiaalquotiënt correct toepast zijn er minder problemen dan ten Hove en Vernooij suggereren. Wel zou een leerling kunnen opmerken dat hij problemen heeft met de veronderstelling van de *volkomen deelbaarheid* van de geproduceerde eenheden en van de hoeveelheden produktiefactoren.

Daarover zou een interessante discussie te voeren zijn, die ingaat op het verschil tussen de werkelijkheid en de analyse daarvan. Misschien iets voor een volgende keer?

* Berekend door in $TK = 1/4 q^2$ TK met $\Delta(TK)$ te vermeerderen, waardoor q met Δq toeneemt. Werkt men dit uit dan volgt tenslotte:

$$\Delta(TK) = \frac{1}{2} q \cdot \Delta q + \frac{1}{4} \Delta q^2.$$