

Halve televisies zijn niet te koop

Reactie op de reactie van R. Schöndorff

J. R. ten Hove en A. T. J. Vernooij

Graag willen wij trachten om antwoord te geven op de vragen die Schöndorff oproept in zijn reactie op ons artikel over "De zes talen van de wiskunde". Schöndorff snijdt een interessante materie aan, die reeds jaren aanleiding is tot controverses in de didactiek van de economie. Wij stellen het zeer op prijs, dat Schöndorff heeft gereageerd. Het geeft ons de kans om het terrein van de economische didactiek nader aan te geven. Als kanttekening vooraf willen wij daarbij opmerken dat het niet onze bedoeling is om lesstof aan te dragen bestemd voor leerlingen, maar om overwegingen te geven bestemd voor docenten.

Wat betreft de reactie op het gebruik van de termen lokaal en globaal willen we kortheidshalve volstaan met de opmerking dat de kritiek van Schöndorff terecht zou zijn als we de termen "lokaal optimum" en "globaal optimum" op andere wijze zouden hanteren dan in de wiskunde gebruikelijk is. Maar gebruik van de bijvoeglijk naamwoorden "lokaal" en "globaal" in combinatie met de term grafiek kan voor niemand aanleiding zijn tot misverstand. Bovendien hebben deze termen in de didactiek van de wiskunde al een hele ontwikkeling doorgemaakt sedert H. Krabbendam zijn artikel "Gloaal of lokaal" presenteerde (1).

Voor nadere literatuur verwijzen wij naar de Nieuwe Wiskrant (2).

Als voorbeeld dat economen, ook in standaardwerken, de term "grafiek" een andere inhoud geven dan in de wiskunde gebruikelijk is, noemen wij slechts het boek "Economie in theorie en praktijk" van Dr J. E. Andriessen, bewerkt door dr R.

Schöndorff en drs N. Chohen (3). Elke figuur, ongeacht of het wiskundig gezien een curve, dan wel een grafiek is, staat aangemerkt als "grafiek".

Natuurlijke getallen

Essentiëler is de problematiek van de bepaling van de marginale kosten. Als het Schöndorff gaat om een correcte toepassing van de wiskunde, ligt het dan niet voor de hand dat economen zich eens meer richten op het gebruik van de moderne wiskunde, zoals die sedert de invoering van de mammoetwet in 1968 wordt toegepast in het wiskundeonderwijs op het VWO? In de moderne wiskunde is het gebruikelijk dat functies vergezeld gaan van

een omschrijving waarin domein, bereik en interval zijn aangegeven. Daarmee wordt men gedwongen meer expliciet te maken welke veronderstellingen gehanteerd worden. Doorvoering van de moderne wiskunde zou veel didactische problemen snel verhelderen.

In de controverse over de micro-economie staat niet zozeer de economische theorie centraal en ook niet de wiskunde als zodanig, maar de didactische methode welke ernaar streeft om de theorie te vereenvoudigen door te werken met kleine aantallen.

Schöndorff hanteert deze methode ook in zijn reactie op ons artikel. Hij geeft een voorbeeld van een totale kostenfunctie met als uitgangspunt $q = 2$. Indien aan deze functie een omschrijving is toegevoegd die aangeeft dat q gedefinieerd is als de rij der natuurlijke getallen, dan is het vanzelfsprekend dat Δq nooit kleiner kan zijn dan 1. En aangezien de economie met aantallen stuks werkt, is er wiskundig altijd sprake van natuurlijke getallen.

Het kleinste mogelijke verschil tussen twee natuurlijke getallen is per definitie 1. Δq kan dus ook nooit tot nul naderen.

De vraag is dan ook niet of continuïteit impliceert dat differentiëren is toegestaan, want continuïteit is wel een noodzakelijke maar geen voldoende voorwaarde. De vraag is veeleer of er discontinue functies zijn, die gedifferentieerd kunnen worden.

Want daar gaat het in feite om. Functies met als domein de rij der natuurlijke getallen zijn discontinu. En discontinuïteit is geen basis om te differentiëren. (4) (5)

Grote aantallen

Het toepassen van een wiskundige techniek, waarin de limietwaarde centraal staat, is hoogst twijfelachtig indien het niet mogelijk is om Δq tot nul te laten naderen. En aangezien er geen halve televisies verkocht worden, noch gemitigeerde andere producten zullen we bij de economie steeds rekening moeten houden met het feit dat we werken met natuurlijke getallen. Dat weet professor Prlwytzkofsky ook. Daarom is het beter, alhoewel nog steeds niet ideaal, om te werken met grote aantallen: duizenden stuks of miljoenen stuks producteenheden.

benaderen, dient echter zo klein mogelijk te zijn. Dit is zo indien het interval, waarop gewerkt wordt, zo veel mogelijk bruikbare waarden heeft. Het voordeel van grote aantallen is dat Δq nu zeer dicht tot nul kan naderen. Indien q gedefinieerd is in duizendtallen, dan is het nog steeds realistisch om over $1/1000 q$ te praten. Maar grote aantallen zijn niet zo geschikt voor sommetjes in de klas, al heeft de rekenmachine daarin enige verlichting gebracht. Er is dus een andere didactische methode nodig om globale economische analyses operationeel te maken in bijzondere (lokale) situaties. In de volgende paragraaf zullen wij hier nader op in gaan.

Aangezien wij het niet onze taak achtten om in een artikel over de zes talen van de wiskunde een uitvoerige uiteenzetting te geven van de marginalistische methode hebben wij volstaan met een omschrijving waarin de marginalistische visie in een zin was samengeperst. Vanzelfsprekend is in een zin geen recht te doen aan een wetenschappelijk paradigma, maar wij gaan ervanuit dat de economedocent op de hoogte is van deze theorie.

In die zelfde zin hebben wij ook de consequenties van de aanpak met grote aantallen aangegeven. Indien op de horizontale as de eerste vijf natuurlijke getallen staan, dan levert dit een grafiek op waarin slechts vijf punten voorkomen in het eerste kwadrant. Door die vijf punten is geen vloeiende lijn te trekken omdat de ruimte tussen de vijf getallen niet behoort tot het domein van de functie. Indien met grote aantallen wordt gewerkt, dus bijvoorbeeld in duizenden stuks, dan is het zinvol om een vloeiende lijn te trekken, omdat met grotere zekerheid is vast te stellen dat de vloeiende lijn een juiste benadering is van de realiteit. Immers de route wordt bepaald door een groot aantal punten, die door de functie zijn gedefinieerd. Wij hebben dat kortheidshalve omschreven als een lijn, die de continuïteit nadert.

"Surrogaat" functie

Bij een dergelijke benadering kan de wiskunde een goed hulpmiddel zijn, mits we blijven uitgaan van het primaat van de economie. Dat houdt onder andere in dat de marginale kosten niet gedefinieerd mogen worden als de uitkomst, die via het differentiëren van de TK-functie wordt bereikt. De marginale kosten zijn de differentiële kosten $\Delta(TK)/\Delta q$, waarbij Δq gelijk wordt aan 1 stuks produkt. Het differentiequotiënt drukt dan de toename van de totale kosten uit bij de kleinste mogelijke toename van de produktie. Het differentiaalquotiënt is daar een goede benadering van indien de stapgrootte zo klein is dat een discontinue

Door te werken met grote aantallen is het differentiaalquotiënt een bruikbare grootheid geworden. De fout die gemaakt wordt door het differentiaalquotiënt te gebruiken om een differentiequotiënt te kostenfunctie benaderd mag worden met een continue functie gebaseerd op *reële* getallen.

In de vervanging van een discontinue functie door een continue functie zit de clou van de controverse.

Om de problematiek van de discontinuïteit op te heffen, gebruiken economen "surrogaat" functies, die hetzelfde verloop hebben als de discontinue functies, maar met als domein de reële getallen. In wiskundige termen vindt er een uitbreiding van het definitiegebied plaats ofwel er is sprake van een analytische voortzetting van de functie.

Daar is niets op tegen mits men het definitiegebied expliciteert. En dat kan met de moderne wiskunde heel eenvoudig: $q \in \mathbb{R}$ (ofwel q behoort tot het domein van de reële getallen).

De gekunstelde redenering dat de economie werkt "met de veronderstelling van *volkomen deelbaarheid* van de geproduceerde eenheden en van de hoeveelheden produktiefactoren" is dan niet meer nodig. Ook hoeft het thema niet doorgeschoven te worden naar "een volgende keer". Door de goede wiskundige benadering is het mogelijk om op te merken dat economen het definitiegebied van de kostenfunctie uitbreiden tot dat van de reële getallen, waardoor de wiskunde als hulpvak bruikbaar wordt voor de economie.

De natuurkunde

Schöndorff draait de zaken om, net als zovele andere economen. Hij definieert de marginale kosten als het differentiaalquotiënt van een continue functie, die gedefinieerd is op een domein van reële getallen. Daarbij verwijst hij naar de natuurkunde, maar vermeldt er niet bij dat de natuurkunde doorgaans werkt met continue grootheden (c.q. met rationale in plaats van natuurlijke getallen)!

Trouwens een natuurkundige zal zijn getallen altijd specificeren met een eenheid. Een afstand is bij voorbeeld nooit "50", maar "50 meter" en een snelheid is bij voorbeeld nooit "20", maar "20 meter per seconde". Waarom doen economen dat niet? Wat moet een leerling zich voorstellen bij een conjuncturele werkloosheid van "0,2" en wat bij marginale kosten van "1" (zie het voorbeeld dat Schöndorff geeft)? Wat is erop tegen om consequent te spreken over een conjuncturele werkloosheid van "... honderdduizend mensen" en over

marginale kosten van "... gulden per produkteenheid"? De discipline om correcte eenheden te hanteren, dwingt tot een zuivere definiëring van functies waar dus naast domein, bereik en interval ook de eenheid een voortdurend punt van aandacht dient te zijn. Automatisch ontstaat zo de plicht om verantwoording af te leggen voor de methodische benadering van de alledaagse werkelijkheid.

Globale en lokale grafieken

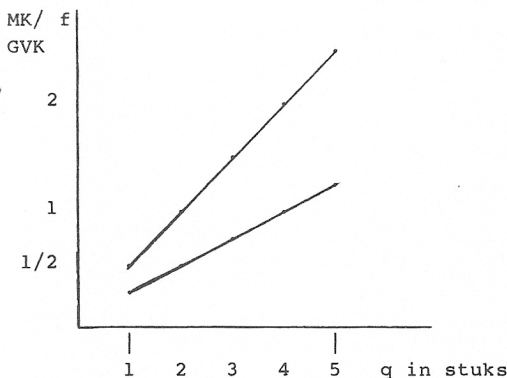
Door het primaat bij de wiskunde te leggen is de verleiding groot om wiskundige exercities uit te voeren die economisch moeilijk te verantwoorden zijn. Zo hanteert Schöndorff in zijn reactie op ons artikel een Totale Kostenfunctie van de tweede graad, zonder verantwoording af te leggen voor het feit dat een tweedegraadsfunctie geen getrouw beeld geeft van de wet van de toe- en afnemende meeropbrengsten. Wij zouden dat als een algemene voorwaarde willen stellen. Uitgaande van het primaat van de economie mag een economische relatie alleen benaderd worden met een "surrogaat"-functie gebaseerd op reële getallen, indien deze een globaal verloop heeft dat overeenstemt met de economische relatie.

Ter illustratie het volgende: Bij een totale kostenfunctie van $\frac{1}{4} q^2$ hoort een marginale kostenfunctie van $\frac{1}{2} q$ en een gemiddelde variabele kostenfunctie van $\frac{1}{4} q$. De lokale grafieken van deze twee functies hebben het volgende verloop:

Figuur 1: Marginale Kosten (MK) en Gemiddelde Variabele Kosten (GVK)

$$MK = f \frac{1}{2} q \text{ waarbij } \{q \in \mathbb{R} \mid 1 \leq q \leq 5 \text{ stuks}\}$$

$$GVK = f \frac{1}{4} q \text{ waarbij } \{q \in \mathbb{R} \mid 1 \leq q \leq 5 \text{ stuks}\}$$

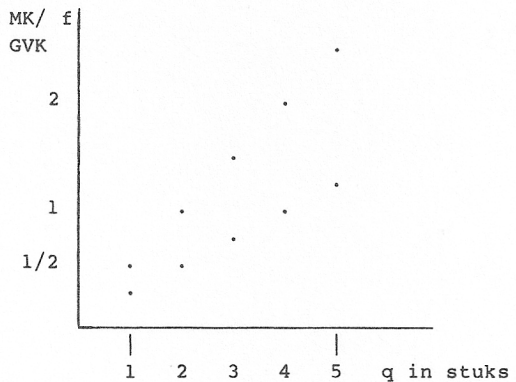


Of, indien niet is aangegeven dat het definitiegebied is uitgebreid van het domein der natuurlijke getallen naar het domein der reële getallen:

Figuur 2: Marginale Kosten (MK) en Gemiddelde Variabele Kosten (GVK)

$$MK = f \frac{1}{2} q \text{ waarbij } \{q \in \mathbb{N} \mid 1 \leq q \leq 5 \text{ stuks}\}$$

$$GVK = f \frac{1}{4} q \text{ waarbij } \{q \in \mathbb{N} \mid 1 \leq q \leq 5 \text{ stuks}\}$$

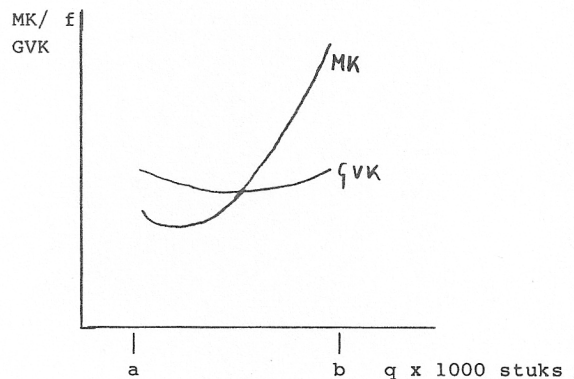


Maar de globale grafiek die past bij de MK functie en de GVK functie is op grond van de wet van de toe- en afnemende meeropbrengsten:

Figuur 3: Marginale Kosten (MK) en Gemiddelde Variabele Kosten (GVK)

$$MK \text{ waarbij } \{q \in \mathbb{N} \mid a \leq q \leq b \text{ stuks}\}$$

$$GVK \text{ waarbij } \{q \in \mathbb{N} \mid a \leq q \leq b \text{ stuks}\}$$



Leerlingen die weten dat het in wezen gaat om figuur 2 als zij de opdracht krijgen om figuur 1 te tekenen, zullen daarin moeizaam gelijkenis kunnen ontdekken met figuur 3 waar het toch eigenlijk om gaat. Want alleen figuur 3 is gebaseerd op economische wetmatigheden. Wat is de functie van deze simplificatie? Is het wellicht de didactische wens om de berekening zo eenvoudig mogelijk te houden en daarom met tweedegraads in plaats van der-

degraandsfuncties te werken? Wordt het dan niet tijd om te erkennen dat het rekenmachientje deze didactische manoeuvre overbodig heeft gemaakt?

Voetnoten:

- (1) H. Krabbendam "Globaal of lokaal", Nieuwe Wiskrant, 1982, nummer 4.
- (2) "Grafieken, verbanden en functies (1)", H. Krabbendam en G. Speelpenning, Nieuwe Wiskrant, mei 1985. Dit artikel is de eerste in een serie van vier artikelen waarin de auteurs hun ervaringen beschrijven met het pakket "Grafieken en verbanden" van de SLO bestemd voor de brugklas. De volgende artikelen verschenen in juli 1985, september 1985 en maart 1986 in de Nieuwe Wiskrant.
- (3) Economie in theorie en praktijk, deel 2, Dr J. E. Andriessen, bewerkt door dr R. Schöndorff en drs N. Cohen, Elsevier, Amsterdam/Brussel, 1980.
- (4) Een essentiële eigenschap van het limietbegrip is:
kies $q_0 > a$
er is een getal $q_1 > a$ zodat $a < q_1 < q_0$;
er is een getal $q_2 > a$ zodat $a < q_2 < q_1$;
etcetera.

Dit geldt voorreële getallen ($\mathbb{R}$), en complexe getallen ($\mathbb{C}$). Differentiëren is derhalve niet mogelijk bij natuurlijke getallen ($\mathbb{N}$) of gehele getallen ($\mathbb{Z}$). Bij een correcte toepassing van bestaande wiskundige begrippen zoals de limietwaarde en het differentiaalquotiënt zal men rekening moeten houden met deze essentiële eigenschap.

- (5) In een artikel getiteld, "Wiskunde een geheimtaal?" van de hand van H. Crijns dat ter redactie werd ontvangen, terwijl dit artikel van Ten Hove en Vernooij naar de drukker was gestuurd, merkt deze op: "Zoals bekend vormt de differentiaalrekening een wezenlijk hulpmiddel bij de berekening van marginale kosten en opbrengsten. Is deze toepassing geoorloofd? Veranderingen die nul als limietwaarde hebben, vormen de basis van differentiaal-quotiënten. Het gebruik van dergelijke limieten veronderstel continue verzamelingen ... prijzen, kosten, opbrengsten en hoeveelheden vormen echter discontinue verzamelingen, zodat differentiëren daarbij strikt genomen buiten beschouwing moet blijven. Dat weerhoudt economen er echter niet van die techniek te gebruiken omdat de differentiaalrekening als een soort vuistregel de economie veel gemak biedt."