

# HET SPEL MET DE KORTSLUITINGEN

drs. A. T. J. Vernooy

Waarom zou een ondernemer zijn productie opvoeren tot het punt waar de marginale kosten gelijk zijn aan de marginale opbrengsten? Als die laatste eenheid net zoveel extra kost als hij extra opbrengt heeft het toch geen zin om hem te maken? Typerende vragen voor een goede HAVO-leerling. Elk jaar als ik de micro-economische theorie uiteenzet met de kolommenanalyse komen ze op. Elk jaar kost het me tijd om de vragen zo te beantwoorden dat de economische theorie zegevierend tevoorschijn komt. Ik mompel iets over grote aantallen en limietwaarden en ik hoop dat de vragensteller voldoende geïmponeerd is om verder te zwijgen. Maar het ergste is dat de leerling eigenlijk gelijk heeft. Toch moet ik hem ervan overtuigen dat zijn manier van realistisch denken onjuist is. Dat knaagt aan me. Waarom kan ik mijn tijd niet aan nuttige zaken besteden?

Het probleem dat zojuist geschets is vloeit voort uit de kolommenanalyse en niet uit de economische theorie. De marginalistische aanpak is gebaseerd op grote aantallen. Zij behoort bij derdegraadsfuncties die een benadering geven voor de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten. Alleen zijn deze functies te gecompliceerd voor de HAVO. Daarom benaderen we ze met kolommen. Maar kolommen mogen niet te lang zijn. Dat eist dus kleine aantallen. En daar zit het probleem. Kleine aantallen brengen de problematiek van de discontinuïteit. We krijgen te maken met onoplosbare problemen die niets van doen hebben met de economische theorie als zodanig. De vereenvoudigingen roepen hun eigen problemen op. We besteden onze tijd aan zaken die in wezen los staan van de economie.

Op het VWO raken we in soortgelijke problemen. De theorie van het producentengedrag wordt benaderd met eerstegraads en tweedegraads kostenfuncties. De marginale kosten zijn dan uitsluitend proportioneel of uitsluitend progressief variabel, maar in elk geval strijdig met de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten. Kunnen zij dan echt bijdragen tot een beter begrip van de micro-economie? Zou een correcte grafiek met een goed verhaal niet meer inzicht geven?

## De discontinuïteit

De discontinuïteit levert behalve problemen ook moeilijkheden op. Differentiëren bij geringe aantallen is apert onjuist. Zelfs op de examens (zie bijvoorbeeld VWO 1978, eerste ronde) worden de leerlingen verplicht de wiskunde foutief toe te passen. Bij de bespreking van deze opgaven, als oefening voor de nieuwe examens, moeten de docenten deze toepassing goedpraten. Ik geloof dat dit wel het beste bewijs is van de manier waarop de economie verworden is tot een *trukendoos*. Pas op het juiste moment de juiste truc toe, denk er verder niet bij na en je wordt dik beloond.

Het is evident dat differentiëren bij geringe aantallen een foutieve marginale kostenlijn oplevert. Voorbeeld I demonstreert dit duidelijk. Een overstap van de kolommenanalyse naar de marginale analyse is dan ook niet mogelijk. In een voorbeeld kun je nooit beide benaderingen tot hun recht laten komen. De leerlingen zijn verplicht de twee varianten als losstaande theorieën te bestuderen en handelen daar ook naar. De hokjesgeest wordt nogmaals bevorderd. Een tweede consequentie van de foutieve marginale kostenlijn is dat zij niet langer gaat door het laagste punt van de gemiddelde variabele en gemiddelde integrale kostenlijn (zie figuur I).

Een ander aspect van de discontinuïteit is de grafische weergave. Wij tekenen continue grafieken bij discontinue functies, omdat het verloop dan beter te zien is (zie figuur I). Halve en driekwart eenheden worden niet gemaakt, maar wel getekend. Opnieuw zijn de eisen uit het didactische referentiekader strijdig met die uit het wiskundige referentiekader. De betere leerling loopt grote kans om in de war te raken en de schuld naar zichzelf te trekken, als de docent deze problemen niet noemt. Noemt hij ze wel dan is de kans groot dat de zwakkere leerling die er oorspronkelijk overheen keek in de war raakt. Natuurlijk kunnen de leerlingen wennen aan deze foute presentatie, maar daarmee is de fout nog niet goedge maakt.

Kleine bedragen zijn net als geringe hoeveelheden didactisch nuttig vanwege de overzichtelijkheid.

## Voorbeeld I

Voor een individuele producent zijn de totale integrale kosten (TIK) gegeven volgens  $TIK = \frac{1}{2} q^3 - 3 q^2 + 10 q + 15$  en de opbrengst is  $f$  13,50 per produkt. De totale variabele kosten (TVC) zijn gelijk aan  $\frac{1}{2} q^3 - 3 q^2 + 10 q$  en de totale constante kosten (TCK) aan 15

**Gevraagd:** de waarden van de marginale kosten (MK), de gemiddelde variabele kosten (GVK), de gemiddelde integrale kosten (GIK) en de gemiddelde opbrengst (GO) en de marginale opbrengst (MO) bij waarden van van 0 tot en met 5 eenheden.

**Oplossing:** de GIK is te berekenen uit  $\frac{TIK}{q} = \frac{1}{2} q^2 - 3 q + 10 + \frac{15}{q}$

de GVK is te berekenen uit  $\frac{TIK - TCK}{q} = \frac{1}{2} q^2 - 3 q + 10$

de MK is op twee manieren te berekenen:

(1) via differentiëren:  $MK = \frac{3}{2} q^2 - 6 q + 10$

(2) door de verandering in de TIK te berekenen

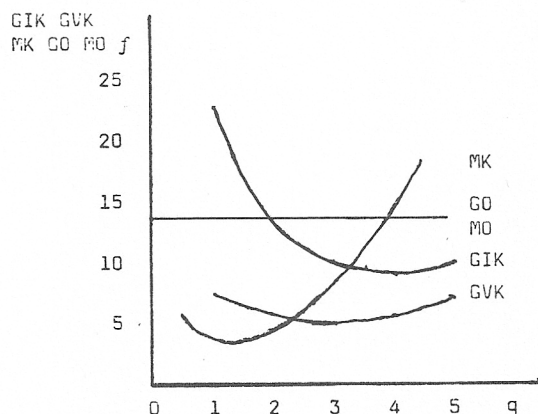
De GO en de MO zijn voor alle produkten  $f$  13,50

Dat levert de volgende waarden op:

| q | TIK    | GIK   | GVK  | MK(1) | MK(2) | GO    | MO    |
|---|--------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | f 15,— |       |      |       |       |       |       |
| 1 | 22,50  | 22,50 | 7,50 | 5,50  | 7,50  | 13,50 | 13,50 |
| 2 | 27,—   | 13,50 | 6,—  | 4,—   | 4,50  | 13,50 | 13,50 |
| 3 | 31,50  | 10,50 | 5,50 | 6,50  | 4,50  | 13,50 | 13,50 |
| 4 | 39,—   | 9,75  | 6,—  | 10,—  | 7,50  | 13,50 | 13,50 |
| 5 | 52,50  | 10,50 | 7,50 | 17,50 | 13,50 | 13,50 | 13,50 |

**Figuur 1a**

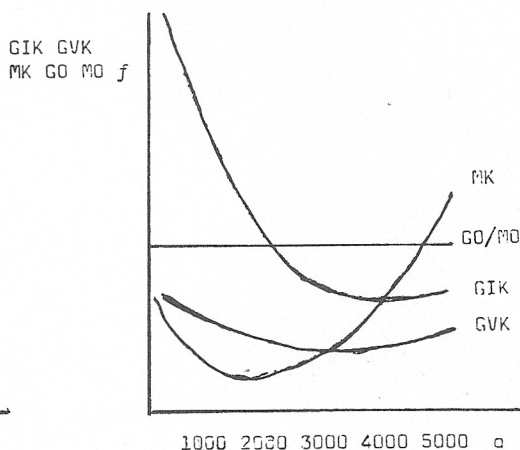
A MK via differentiëren bij kleine aantallen volgens voorbeeld 1



- continue curven bij discontinue aantallen
- MK niet door het laagste punt van de GIK en de GVK

**Figuur 1b**

B MK via differentiëren bij grote aantallen zoals het zou moeten zijn



- continue curven bij (bijna) continue aantallen
- MK wel door het laagste punt van de GIK en de GVK

Een producent maakt bij voorbeeld vijf produkten die hem een jaarlijks winst van bij voorbeeld vijftien gulden opleveren (zie voorbeeld I). Toch vertekenen deze getallen de werkelijkheid en ze kunnen de scepsis van de leerling oproepen. Daardoor kunnen bepaalde leerlingen zich afsluiten voor de theorie en de essentie van het verhaal missen. Ook hier sluit het simplistische didactische denkkader niet aan bij de werkelijkheid noch bij de volwassen economische theorie. *Simplificaties kunnen tegelijk complicaties zijn.*

Figuur 2 toont aan dat een berekening via kolommetjes maken beter aansluit bij de realiteit dan een berekening via differentiëren, voor zover het om kleine aantallen gaat. Op de HAVO kiezen we uitsluitend voor deze benadering via kolommen en het lijkt een goede keuze. Maar de discontinuïteit levert nog meer problemen op. Immers nadat de kolommen berekend zijn moet het punt van maximale winst worden bepaald. Nu blijken er zoals eerder al gezegd is, twee punten voor in aanmerking te komen. Het punt waar de marginale opbrengst gelijk is aan de marginale kosten, dus het theoretisch juiste punt, staat echter het zwakste. Waarom zal een producent die laatste eenheid nog

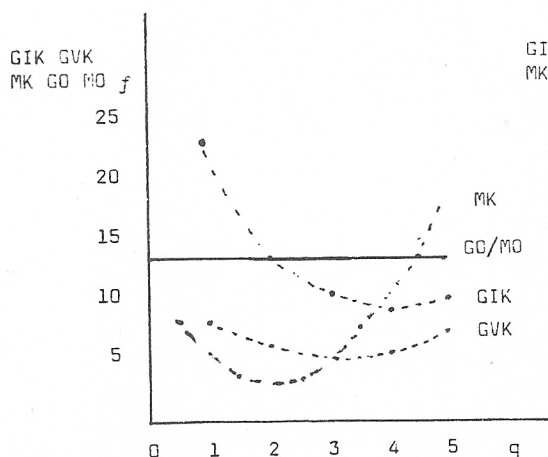
maken als hij toch zijn winst niet ziet toenemen? Een aanpak gebaseerd op werkelijkheidszin levert een andere uitkomst dan de theoretisch juiste. De oorzaak hiervan ligt bij het hanteren van simplificaties.

*Zijn simplificaties eigenlijk wel vereenvoudigingen?*

Maar het houdt nog niet op. Na de berekening komt de tekening. Teneinde de marginale kostenlijn door het laagste punt van de gemiddelde variabele kostencurve en gemiddelde integrale kostencurve te laten lopen dienen de marginale kosten ingevuld te worden halverwege de eenheden  $q$  (zie figuur 3). Het resultaat is dat de maximale winst in de tekening bij een halve eenheid terecht komt.

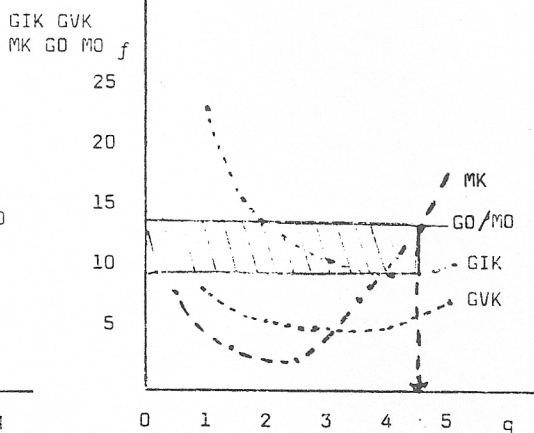
Daardoor wijkt de arcering van de winst af van de twee eerder genoemde mogelijke uitkomsten. Is het en wonder dat de leerlingen veel moeite hebben met de stof? Is het vreemd dat de problemen niet ondanks maar juist dankzij onze simplificaties ontstaan? Hoeveel kronkels kan een stuk theorie eigenlijk verdragen om nog acceptabel te zijn? *Kronkels dan wel te verstaan die niet voortvloeien uit onze economische theorie, maar uit onze didactische aanpak.*

**Figuur 2**  
**Berekening via kolommen**



- discontinuecurves bij  
discontinue aantallen
- MK door het laagste punt  
van de GIK en de GVK

**Figuur 3**  
**Arcering van de winst**



*Er is maximale winst bij 4 of 5 eenheden:*

$$4 \times (13,50 - 9,75) = f 15,-$$

$$5 \times (13,50 - 10,50) = f 15,-$$

*Geen van de beide oplossingen wordt gearceerd.*

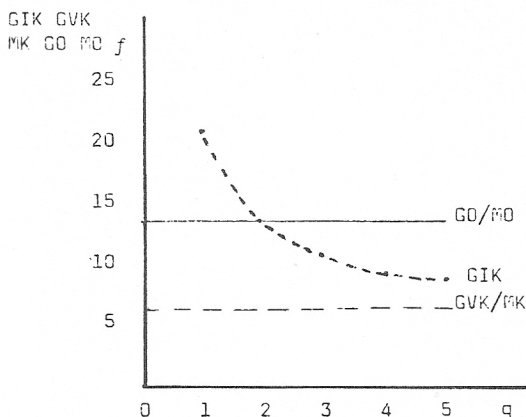
De marginale kostentheorie is gebaseerd op grote aantallen. Bij grote aantallen wordt de laatste eenheid zo onbeduidend ten opzichte van het totaal dat ze als naderend tot nul kan worden beschouwd. Alle problemen die zojuist opgesomd zijn vallen dan weg. Daarom hechten wiskundigen zoveel waarde aan continue functies. En wij eigen-gereide economen, denken dat we onze leerlingen helpen als we teruggaan naar kleine aantallen en discontinue functies. We zadelen onszelf op met een reeks problemen die niets bijdragen tot het economisch inzicht, maar het zicht daarop juist verwarren. De schijnexactheid van de wiskundige vertroebeling wint het van de verbaal economische aanpak die goed inzichtelijk is. Waarom kunnen we niet volstaan met juiste grafieken en een goed verbaal verhaal? Levert dat niet veel meer inzicht op?

Toch wordt die wet als een steeds terugkerende ervaring gepresenteerd.

Een tweede variatie wordt gehanteerd in het kader van de produktiefuncties van het type Cobb Douglas. Bij voorbeeld de totale integrale kosten zijn  $2q^2 + 15$ . De marginale kosten bedragen dan  $4q$ , dus alleen stijgend, en de gemiddelde variabele kosten bedragen  $2q$ , dus progressief variabel. De grafieken krijgen dan wederom een totaal ander aanzien (zie figuur 5). Aan de problemen van de discontinuïteit wordt op dit moment voorbij gegaan.

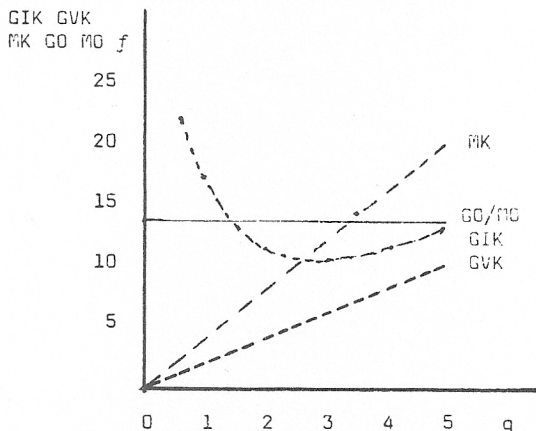
In totaal zien we drie variaties op het micro-economische model van het producentengedrag. Elk van deze variaties heeft zijn eigen vooronderstellingen, zijn eigen wetmatigheden en zijn ei-

**Figuur 4.**  
**Alleen proportioneel variabele kosten**



*Herkent u hierin figuur 1B?  
En uw leerlingen, zien die herkenningspunten?*

**Figuur 5.**  
**Alleen progressief variabele kosten**



*Herkent u hierin figuur 1B?  
Herkent u hierin figuur 4?  
En uw leerlingen, zien die herkenningspunten?*

### Het wordt nog merkwaardiger

Op het VWO gaan we nog een tweetal variaties aanbrengen op de derdegraads kostenfunctie. Tegen de achtergrond van de break-even analyse maken we gebruik van uitsluitend proportioneel variabele kosten die leiden tot een eerstegraads kostenfunctie, bij voorbeeld de totale integrale kosten zijn  $6q + 15$ . De marginale en de gemiddelde variabele kosten wijken daardoor sterk af van de oorspronkelijke curven. (zie figuur 4) En dat is dan zacht uitgedrukt, want in twee horizontale rechte lijnen die geheel samenvallen, kun je de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten niet langer herkennen.

gen conclusies. Die conclusies zijn strijdig. Probeer u maar eens het shut-down-point (marginale kosten is gelijk aan de variabele kosten) aan te geven in de diverse grafieken. Hoe moet een leerling met al deze strijdige modellen omgaan? Welk beeld moet een leerling oproepen bij zichzelf als hij een kostenvraagstuk krijgt? Concreter gezegd, welk van de vier stelsels grafieken moet hij in zijn achterhoofd houden als een kostenprobleem zich aandient?

### Het alternatief

Het wordt tijd dat we een duidelijke keuze maken.



Hebben we te maken met leerlingen die economie gaan studeren of hebben we te maken met leerlingen die een stuk algemene ontwikkeling nodig hebben? Geven we wiskunde, geven we trucjes of geven we economie? Gaat het om inzicht in de economische theorie of gaat het om inzicht in de economische werkelijkheid?

De kern van het probleem ligt daar waar de wiskundige presentatie van de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten te ingewikkeld wordt. Proberen we de wetmatigheden te benaderen met eenvoudige wiskundige modellen die strijdig zijn met bovengenoemde wet of proberen we de derdegraads functies verbaal weer te geven in overeenstemming met de economische inzichten. Het komt mij voor dat de leden van de adviescommissie voor de leerplanontwikkeling (ACLO) een voorkeur hebben voor de eerste aanpak (zie het advies Algemene economie voor het VWO, oktober 1979). Ik wil daarentegen nadrukkelijk pleiten voor de laatste.

Inzicht in de economische werkelijkheid dient centraal te staan op HAVO en VWO. Een groot stuk theorie zal geschrapt moeten worden. De wiskunde mag alleen gebruikt worden voorzover ze duidelijkheid schept in de visie op de economische werkelijkheid. Voor de HAVO heeft dit tot gevolg dat we noodgedwongen moeten concluderen dat de wiskunde, zodra ze te ingewikkeld wordt (derdegraads functies) of teveel complicaties oproept (discontinuïteit), te enen male ongeschikt is om als hulpmiddel te dienen. De marginalistische theorie vereist derdegraadsfuncties en grote aantallen. Berekeningen op dit terrein zijn daarmee of te moeilijk of te omvangrijk. Zij dienen derhalve achterwege te blijven op de HAVO. Grafisch ligt het anders. Het verloop van de curven kan aannemelijk gemaakt worden op verbale wijze. Vanuit (goedgetekende) grafieken kunnen de leerlingen getoetst worden op hun inzichten.

Op het VWO kunnen we wel derdegraads functies hanteren. Gezien de eis van grote aantallen heeft een aanpak via kolommen geen zin.

Maar ook de tweedegraads totale kostenfunctie verdwijnt en de erbij passende micro-economische produktiefunctie. In de praktijk komt het er toch vaak op neer dat de produktietheorie verstand is tot een stel sommetjes waarin de wiskundige vaardigheden van de leerlingen getoetst wordt. Partieel differentiëren, *stof die niet eens in de stof van het wiskundeprogramma op het atheneum zit*, komt naar voren. Als economen moeten wij pure wis-

kunde doceren onder het motto dat de wiskunde de econoom ten dienste staat. Volgens mij is het omgekeerde het geval. De economen moeten gebruikmaken van de wiskundige vaardigheden van de leerlingen, maar die vaardigheden moeten er wel zijn. De produktiefuncties zijn dan duidelijk te hoog gegrepen. Zeker nu geconstateerd is dat uit de produktiefuncties kostenfuncties voortvloeien die strijdig zijn met de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten. Het ware inzicht in de economische verbanden wordt opgeofferd om de wiskundige trucs vrij spel te geven. In een volgend artikel zal ik uitgebreid terugkomen op de produktiefuncties.

De tweede wiskundige economische simplificatie die moet vervallen is de eerstegraads totale kostenfunctie. Zoals is opgemerkt past deze benadering in de context van de break-even analyse en de lineaire programmering. Deze technieken zijn bedrijfseconomische theorieën die thuishoren in het economie II programma, dan wel in het wiskundeprogramma. Zij zijn gebaseerd op een veronderstelling die in de bedrijfseconomische theorie veelvuldig gehanteerd wordt, namelijk de veronderstelling dat variabele kosten proportioneel zijn. Deze veronderstelling is apert strijdig met de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten. Als wiskundige techniek is de lineaire programmering niet zo moeilijk, maar het is een truc, die ook een truc blijft zolang wij ons beroepen op de wetten van Gossen en de eruit geleide kostenanalyses. Zij is een oneigenlijk element in de micro-economische analyses.

Maar er is nog een vreemde zaak. De lineaire programmering is toegevoegd aan het programma in een periode dat de tijd van voorbereiding op het examen met vele weken is bekort. Wordt het niet tijd dat sectie één van de VEMO in navolging van sectie twee een aanzienlijke besparing van het examenprogramma bij de inspectie bepleit?

In dit tweede artikel is uitvoerig aandacht besteed aan het *producentengedrag*. Talloze problemen waar leerlingen mee worstelen blijken voort te komen uit de zogenaamde vereenvoudigingen die wij toepassen. Zij hebben niets te maken met inzicht in de economische werkelijkheid of inzicht in de economische theorie. Zij kosten ons als docenten ontzettend veel tijd. Die tijd zou nuttiger besteed kunnen worden. De beste manier om dat te bereiken is om die vereenvoudigingen te schrappen en er een goed verbaal betoog voor in de plaats te nemen, geïllustreerd met correcte grafieken.