

Wendbaarheid en het elasticiteitsbegrip

A.T.J. Vernooij en P. van der Aa

Leerlingen op de HAVO hebben over het algemeen meer moeite met opgaven over elasticiteitsberekeningen dan je als docent verwacht. Deels hebben deze te maken met de rekentechnische problemen rond het berekenen van percentages, deels met het toepassen van de elasticiteit, als deze eenmaal berekend is. In dit artikel willen wij niet ingaan op de rekentechnische problemen ¹⁾, maar staat de toepassing van de elasticiteit centraal. Het gaat daarbij om een bespreking van de diverse vormen van wendbaarheid die leerlingen moeten bezitten om de uiteenlopende opgaven te kunnen maken.

Vormen van wendbaarheid

Van Parreren ²⁾ noemt het wendbaar toepassen van kennis de belangrijkste doelstelling van het onderwijs. Bij het elasticiteitsbegrip zit die wendbaarheid impliciet verweven in allerlei situaties. Maar in het leerplan voor HAVO en VWO staat niet expliciet aangegeven welke soorten van wendbaarheid verwacht worden en hoe die onderwezen moeten worden. In principe kunnen er vier vormen van wendbaarheid worden benoemd.

De eerste vorm van wendbaarheid is de toepassing van elasticiteit in verschillende situaties. Prijselasticiteit van het aanbod en inkomenselasticiteit van de vraag zijn twee voorbeelden van toepassing van het elasticiteitsbegrip in concrete situaties. In schema 1 (blz. 162) hebben wij getracht om een volledige beschrijving te geven van de berekening van de elasticiteit op een abstracte, verbale wijze. In schema 2 (blz. 163) is dit uitgewerkt voor een bijzonder geval: de inkomenselasticiteit.

Uit de schema's blijkt dat de elasticiteitsberekening zeven rekentechnische stappen vraagt, indien als berekeningsbasis de oude waarde van de grootheden wordt genomen. Indien men niet uitgaat van de oude waarde maar van het gemiddelde van de oude en de nieuwe waarde komen er nog twee rekentechnische stappen bij, zodat een leerling negen stappen moet zetten om het volledige oplossingspad af te lopen. Volop kans om te struikelen dus.

Van deze zeven stappen zijn er eigenlijk twee overbodig. De omzetting van een relatieve verandering in een procentuele verandering gebeurt door teller en noemer met 100% te vermenigvuldigen. Daarna wordt de teller door de noemer gedeeld en verdwijnt die 100% weer uit teller en noemer.

Uit schema 1 (blz. 162) valt af te lezen dat de berekening van een procentuele verandering in een grootheid drie rekentechnische stappen vergt. De 'oude waarde' treedt daarbij tweemaal op als rekenfactor. Docenten veronderstellen dat leerlingen deze rekentechniek in het basisonderwijs gehad hebben. Zij klagen over de gebrekkige kennis van leerlingen met betrekking tot procentberekeningen, zonder zich te realiseren dat het berekenen van een *procentuele verandering* iets anders is dan het berekenen van een *percentage*.

In het basisonderwijs volstaat men met het behandelen van procentberekeningen. Procentuele veranderingen behoren niet tot de stof voor de CITO-toets. Het verschil is erin gelegen dat een procentberekening uit twee stappen bestaat, terwijl het berekenen van een procentuele verandering bestaat uit drie stappen. Een deel van de problemen met het berekenen van de elasticiteiten zou hiermee te maken kunnen hebben.

Om de leerlingen in staat te stellen de rekentechnische kant van de elasticiteiten onder controle te krijgen, heeft de Postbank een computerondersteund onderwijsprogramma laten ontwikkelen waarin een uitvoerige ondersteuning van het berekenen van procentuele veranderingen is opgenomen. Dit programma is gratis verkrijgbaar bij de EDUbank, de educatieve databank van de Postbank. ³⁾

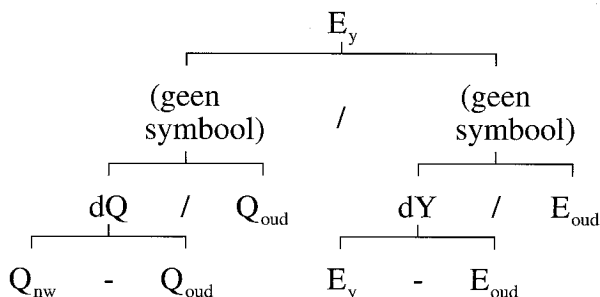
In het schema komt zowel de procentuele verandering als de relatieve verandering voor. Dit zijn twee verschijningsvormen van dezelfde elasticiteit. De tweede vorm van wendbaarheid bestaat er dan ook uit dat leerlingen in staat zijn om de ene verschijningsvorm om te zetten in de andere. Vervolgens kunnen binnen iedere vorm weer variaties ontstaan. Bij voorbeeld de eerder genoemde keuze voor de gemiddelde waarde als berekeningsbasis. Bij de rela-

tieve verandering kan men de verandering tot nul laten naderen en overgaan naar elasticiteit als een berekening met een limietwaarde. Maar dit is stof voor het VWO.

De *derde vorm* van wendbaarheid heeft niet zozeer met het elasticiteitsbegrip zelf te maken maar met de wijze waarop de probleemsituatie wordt weergegeven. Leerlingen moeten in staat zijn om een verbaal verhaal over de elasticiteit te begrijpen, deze in symbolische termen weer te geven en vervolgens een cijfermatige uitkomst te berekenen. Soms is ook nog een grafische illustratie vereist. Dit betekent dat leerlingen over de nodige vertaalvaardigheden moeten beschikken ⁴⁾. Dat is niet eenvoudig, omdat in diverse leerboeken het elasticiteitsbegrip op twee verschillende wijzen wordt gepresenteerd. In de grafische presentatie wordt elasticiteit gekoppeld aan een drempelinkomen en in de analytische presentatie aan de verhouding tussen twee veranderingen ⁵⁾.

Van Streun ⁶⁾ heeft in zijn proefschrift over het heuristisch wiskunde-onderwijs aangetoond dat expliciete aandacht voor de verschillende presentatievormen tot betere resultaten van leerlingen leidt. Voor de berekening van de inkomenselasticiteit dient de verbale weergave uit schema 1 eerst vervangen te worden door een analytische weergave, zoals afgebeeld in het onderstaande PAD (probleem analyse diagram). De meeste termen vinden een equivalent in een symbool, maar niet alle begrippen. Voor het begrip 'relatieve verandering in de vraag' is geen andere notatie dan de combinatie van de symbolen die een bewerking ondergaan. Dit vermindert de hoeveelheid benodigde symbolen maar het maakt het voor de leerling onoverzichtelijker om zich een voorstelling te maken van het begrip 'relatieve verandering in de vraag'. Om de berekening uit te voeren dienen de leerlingen vervolgens de symbolen te vervangen door getallen.

PAD van de berekening van de elasticiteit



De *vierde vorm* van wendbaarheid gaat over de toepassing van de berekende elasticiteit in nieuwe situaties. In principe verandert er dan niets aan het schema zoals dat hierboven staat weergegeven. Alleen de invulling met getallen wordt anders. Het dimensielo-

ze getal aan de top van de piramide is nu bekend. De elasticiteit is van onbekende tot bekende verheven. Vervolgens kan een van de vier oorspronkelijke data tot onbekende gemaakt worden, terwijl de andere data gehandhaafd blijven.

Deze vorm van wendbaarheid levert een serie van maximaal vier verschillende vraagstukken op. De meest voor de hand liggende variant is om de nieuwe hoeveelheid te vragen (Q_{nw}) als de E_y en de drie andere data bekend zijn. Maar ook de vraag naar het nieuwe inkomen (Y_{nw}) is mogelijk als E_y en drie data gegeven zijn. Aangezien de oude waarde van de vraag en van het inkomen tweemaal voorkomen in het schema, zijn de sommen die vragen om de oude waarde van de gevraagde hoeveelheid dan wel van het inkomen te berekenen moeilijker dan de sommen die vragen om de nieuwe waarde te berekenen.

Het omkeren van redeneringen is een geliefde wijze om te testen of een structuur begrepen is. Dat komt bij elasticiteiten voor, maar ook in andere rekentechnische probleemsituaties, zij het dat het bij Bedrijfs-economie vaker voorkomt dan bij Algemene Economie. Steeds ligt eenzelfde gedachte ten grondslag aan deze wijze van kennis toetsen. Daarom zal hier iets dieper op ingegaan worden.

De omgekeerde redenering

Het is gebruikelijk in het economisch onderwijs om een vraagstuk uit te leggen door de uitkomst voor te rekenen. De docent heeft het oplossingspad in zijn hoofd en begint zijn uitleg door de eerste stap van de oplossing te demonstreren. Hoe hij aan dat oplossingspad komt, vertelt hij niet. Goffree noemt dat het geheim van de docent ⁷⁾. Vermoedelijk is het echter eerder zo dat de docent zich onvoldoende realiseert dat hij met een oplossingspad werkt.

Als het gevraagde aan de top van de piramide staat is het mogelijk een redenering van het gevraagde op te zetten in de richting van de data volgens logische stappen. De *oplossingsstructuur* loopt dan van boven naar beneden terwijl het *oplossingspad* van onder naar boven loopt, waarbij eerst de linkertak wordt afgewerkt en dan de rechtertak. Dit komt overeen met de aanpak van Bedrijfseconomische vraagstukken ⁸⁾.

Een stuk ingewikkelder wordt het als de redenering in omgekeerde volgorde uitgevoerd moet worden, bij voorbeeld als de nieuwe hoeveelheid berekend moet worden indien de inkomenselasticiteit en de overige data bekend zijn. Om de weg te vinden van de onbekende, die links onder in schema 2 staat, naar de verstreckte data dient een lange weg afgelegd

te worden. Wat verwacht wordt is dat leerlingen een *oplossingsstructuur* doorzien die van links onder alle verbindingen weet te leggen met de data die in de top en rechtsonder ingevuld kunnen worden. Daarna moet de berekening zelf in omgekeerde volgorde worden uitgevoerd. Het *oplossingspad* loopt dus van rechtsonder via de inkomens-elasticiteit als het centrale begrip naar de onbekende linksonder.

In woorden luidt de oplossingsstructuur:

1. De nieuwe vraag is gelijk aan de oude vraag plus de vraagverandering.
2. De vraagverandering is af te leiden door de oude vraag te vermenigvuldigen met de relatieve vraagverandering.
3. De relatieve vraagverandering is af te leiden uit de procentuele vraagverandering door deze te delen door 100%.
4. De procentuele vraagverandering is af te leiden uit de inkomenselasticiteit door deze te vermenigvuldigen met de procentuele inkomensverandering.
5. De procentuele inkomensverandering is te berekenen door de relatieve inkomensverandering met 100% te vermenigvuldigen.
6. De relatieve inkomensverandering is te berekenen door de inkomensverandering te delen door het oude inkomen.
7. De inkomensverandering wordt afgeleid door het verschil te nemen van het nieuwe inkomen en het oude inkomen.

Het lijkt misschien belachelijk om dit zo voluit op te schrijven, maar toch is het een beschrijving van hetgeen leerlingen in hun bol moeten hebben om te begrijpen wat zij aan het doen zijn. Temeer daar het oplossingspad precies in omgekeerde volgorde doorlopen moet worden. In principe is de oplossingsstructuur weer te geven als een schema van handelingen met het gevraagde aan de top (zie schema 3 op blz. 163). De oplossingsstructuur loopt dan van het gevraagde naar de verstrekte data. Invulling van de verstrekte data op de betreffende plaatsen leidt tot een rekenstructuur die onverbiddelijk leidt tot de correcte uitkomst. Dit is dan de weergave van het algoritme ⁹⁾.

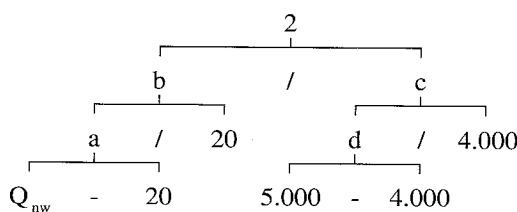
Het enige probleem met deze wijze van noteren is dat er geen logisch verhaal achter steekt. Omgekeerde redeneringen zijn niet te beredeneren. Ze zijn alleen af te leiden vanuit een bekend schema. Ze vooronderstellen dat de leerling op de hoogte is van de structuur zoals die in de eerdere schema's is vastgelegd. Daarom is het beter om niet te trachten de omgekeerde redeneringen in schema's vast te leggen. Beter is het om de oorspronkelijke schema's te laten zoals ze zijn, de data in te vullen en dan de leerling te laten zien dat de rechtertak eenzelfde bewerking

oplevert als daarvoor, maar dat de linkertak steeds een omkering van de bewerking vraagt. Aftrekken wordt optellen en delen wordt vermenigvuldigen.

Een getallenvoorbeeld kan dit toelichten.

Stel de inkomenselasticiteit is 2, de oude vraag naar een goed is 20 stuks per maand en het inkomen stijgt van f 4.000 naar f 5.000 in de maand. Hoe groot is dan de nieuwe hoeveelheid die gevraagd wordt door deze consument?

Indien de percentages even buiten beschouwing blijven, wordt het schema van de berekening als onderstaand. De oplossingsstructuur verloopt van Q_{nw} via grootheid a , naar b , naar c , naar d . Het oplossingspad verloopt in omgekeerde richting van grootheid d , via c naar b , dan naar a en ten slotte naar Q_{nw} .



De *oplossing* luidt dus:

$$d: f\ 5.000 - f\ 4.000 = f\ 1.000$$

$$c: f\ 1.000 / f\ 4.000 = 0,25$$

$$b: 2 \times 0,25 = 0,50$$

$$a: 0,50 \times 20 = 10$$

$$Q_{nw}: 10 + 20 = 30$$

Vragen stellen in de klas

In bovenstaand schema staat ook aangegeven hoe de docent een leerling kan helpen bij het vinden van een oplossing. Hij kan in een onderwijs-/leergesprek vragen stellen die erop gericht zijn om de leerling een deel van het probleem op te laten lossen, als deze niet in staat is om de hele bewerking uit eigen beweging te voltooien. 'Vragen stellen in de klas' is een wijze van uitleggen hoe het oplossingspad in elkaar zit.

Als een leerling niet weet hoe de nieuwe gevraagde hoeveelheid berekend moet worden, kan de docent dit uitleggen door de berekening vanaf grootheid d uit het voorbeeld voor te doen. Maar hij kan ook vragen of de leerling in staat is om grootheid a te berekenen. Zo niet dan kan hij verder vragen naar de waarde van grootheid b of c . Steeds wordt zijn vraag een stapje eenvoudiger omdat er minder bewerkingen vooraf gaan aan de berekening van de uitkomst

op die deelvraag. De meest simpele vraag is gericht op de berekening van de waarde van grootheid *d*. De analyse van een vraagstuk in schematische vorm is om deze reden niet alleen nuttig voor leerlingen. Voor beginnende docenten is het een ideale manier om grip te krijgen op het proces van *sturend vragen*. Ervaren docenten hebben uit routine geleerd hoe ze ingewikkelde vraagstukken kunnen opsplitsen in deelvragen, waarmee ze hun leerlingen stapsgewijze bij de goede uitkomst brengen. Onervaren docenten hebben hun eigen automatismen vaak nog niet ontmaskerd en kunnen profijt halen uit een gestructureerde aanpak.

De moeilijkheidsgraad

Het schematiseren van de oplossingsstructuur maakt het ook mogelijk om de moeilijkheidsgraad van vraagstukken vast te stellen. Dit kan van belang zijn voor het bepalen van de moeilijkheid van proefwerken of schoolonderzoeken. Hoe meer vertakkingen er in een schema zitten, hoe gecompliceerder de berekening is. De omkering is een extra complicatie die terugkomt bij iedere vertakking.

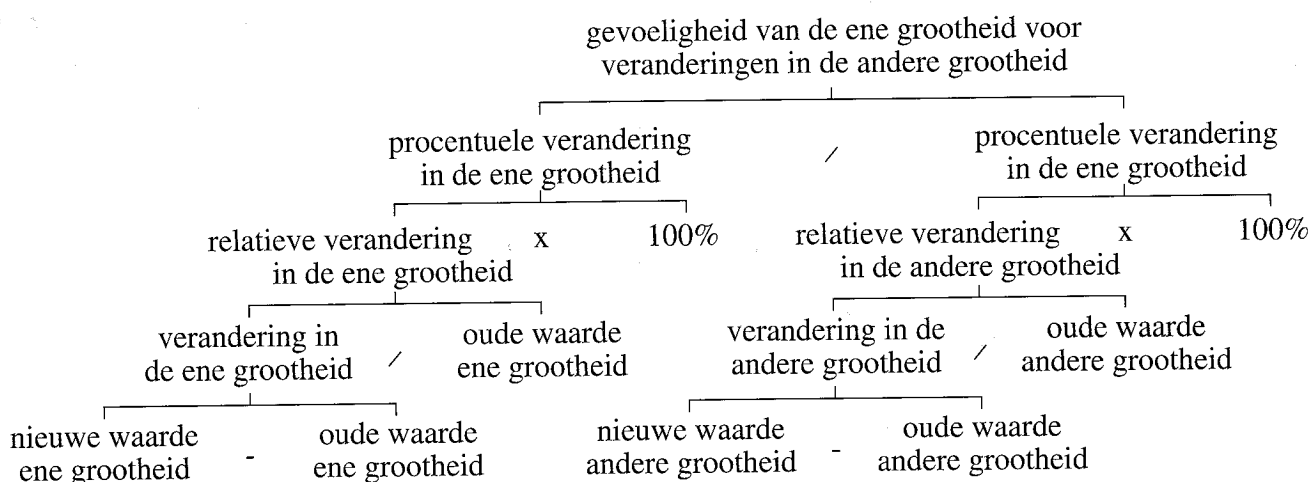
In veel rekentechnische opgaven zijn niet meer dan drie of vier vertakkingen aanwezig. Dat is over het algemeen al vrij gecompliceerd. Een opgave met zeven vertakkingen is heel gecompliceerd, vooral wanneer die als omgekeerde redenering wordt opgevraagd. Het is dan ook niet verwonderlijk dat veel

leerlingen grote problemen hebben met de toepassing van het elasticiteitsbegrip.

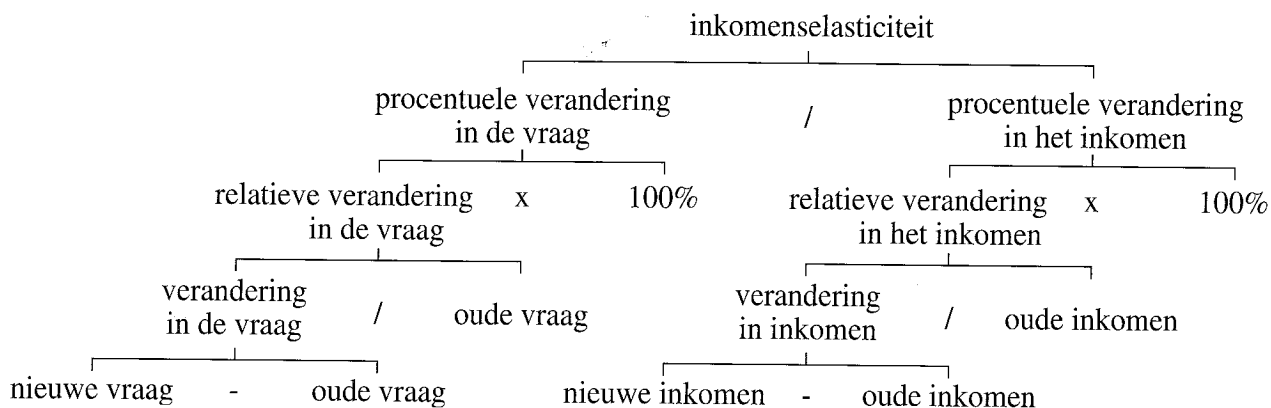
Noten

1. Dr. N.J.M. Hardebol, Didactische opmerkingen over de behandeling van het elasticiteitsbegrip, *Tien jaar EMD*, mei 1981.
2. Dr. C.F. van Parreren, (1982). *Leren op school*. Groningen: Wolters Noordhoff.
3. Edubank, de educatieve databank van de Postbank, informatie over gratis computer ondersteund onderwijsprogramma's: Postbank N.V., Concernstaf Communicatie, Postbus 21009, 1000 EX Amsterdam.
4. J.R. ten Hove en drs A.T.J. Vernooij (1986). De Zes Talen van de Wiskunde. *Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs*, nr 9, pag 265-271.
5. Drs. P.M.E.M. van der Aa en drs. A.T.J. Vernooij, Luxe goederen en wat economen zich daarmee permitteren, *Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs*, (in voorbereiding).
6. Dr. A. van Streun (1989). *Heuristisch Wiskunde-onderwijs*. Groningen: proefschrift.
7. Dr. F. Goffree (1986). *Rekenen, Realiteit en Rationaliteit*. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar aan de UvA.
8. Drs. A.T.J. Vernooij (1989). De analyse van een bedrijfseconomisch vraagstuk. *Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs*, 1989-nr 5.
9. Lev N. Landa (1983). The Algo-Heuristic Theory of Instruction. In *Instructional Design Theories and Models, An overview of their current status*, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Schema 1: Abstracte formulering van de elasticiteitsberekening als achtergrondinformatie



Schema 2: De berekening van de inkomenselasticiteit



Schema 3: De omkering van de redenering

