

DE ZES TALEN VAN DE WISKUNDE

Een didactische verkenning

J. R. ten Hove en A. T. J. Vernooij

De Stuurgroep Economie HAVO heeft onlangs een ontwerp-leerstoflijst gepresenteerd. Een aspect van dit voorstel willen wij naar voren halen in dit artikel om zo een reeks van didactische problemen te analyseren. Bij de vraag- en aanbodcurven in H2 en H3 geeft de stuurgroep als voorschrift voor toetsing en afbakening van leerstof dat deze curven bepaald moeten worden vanuit een tabel en met behulp van een lineaire functie. Het verloop moet verbaal verklaard worden. Ons intrigeert de vraag of dit wel een consistente benadering is. De stuurgroep signaleert vier wiskundige systemen, te weten de tabel, de grafiek, de functie en de verbale verklaring. Zijn deze systemen wel zo eenvoudig verenigbaar als de voorschriften suggereren? Of is de stuurgroep erin geslaagd om in enkele woorden een veelvoud van didactische problemen samen te pakken?

De tabel

De tabelbewerking is een wiskundig systeem dat vooral op het HAVO opgeld doet. Net als ieder wiskundig systeem heeft deze methodiek voordelen en beperkingen. De beperkingen hebben twee mogelijke oorzaken: theoretische en didactische. Theoretisch levert een tabel discontinuë functies op, terwijl de economie doorgaans van continuë functies uitgaat. In de praktijk valt dat meestal niet zo op omdat de modernisering van de wiskunde sinds de invoering van de Mammoetwet in 1968 (!) nog niet doorgedrongen is in het economieonderwijs. Maar omwille van dezelfde onduidelijke redenen als de stuurgroep zullen wij hier aan dit punt voorbijgaan.

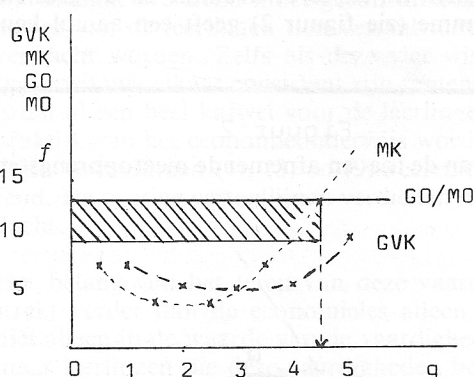
De didactische beperkingen van de tabel-techniek liggen in de praktische hanteerbaarheid. Tabellen mogen niet te lang zijn en moeten van kleine aantallen uitgaan om de berekeningen niet te omvangrijk te maken. Daardoor moeten HAVO leerlingen de kostenkolommen van resp. nul, een, twee, drie, vier en vijf eenheden berekenen. Dit versterkt de problematiek van de discontinuïteit, hetgeen duidelijk wordt als de tabel vertaald moet worden in een grafiek.

Uit deze didactische beperkingen vloeit een aantal didactische problemen voort voor de vertaling van het ene wiskundige systeem naar het andere. Als economiedocenten mogen wij ervan uitgaan dat leerlingen over voldoende vertaalvaardigheden beschikken om een tekst om te zetten in een tabel en om een tabel weer terug te brengen tot een tekst. Ook de vertaling van een tabel in een grafiek mag bekend verondersteld worden, net zo goed als de vertaling terug van een grafiek in een tabel. Maar tezamen met de vertaling van een grafiek in een verbaal verhaal zijn er reeds vijf vertaalvaardigheden noodzakelijk. En het zou dan wel prachtig zijn als de drie genoemde wiskundige systemen (gra-

fiek, tabel en verbaal verhaal) ineensloten. Maar dat doen ze niet altijd blijkens de alom bekende grafiek die is weergegeven in figuur 1. En dat roept verwarring op.

Figuur 1

arcering van de winst



Er is maximale winst bij 4 of 5 eenheden:

$$4 \times (13,50 - 9,75) = f \ 15,-$$

$$5 \times (13,50 - 10,50) = f \ 15,-$$

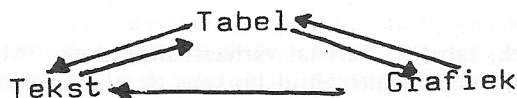
Geen van beide oplossingen wordt gearceerd

Het probleem schuilt bij de micro-economie in de botsing tussen de theorie en de didactische beperkingen van de tabelmethode. De theoretische veronderstelling van de marginalistische benadering is, dat bij voldoende grote aantallen een kostencurve de continuïteit benadert, zodanig dat differentiatie is toegestaan. Tegelijkertijd verhinderen de didactische beperkingen aan de tabel-techniek dat er met grote aantallen gewerkt wordt. Zodoende komt bijvoorbeeld in figuur 1 het snijpunt van MO

en MK precies halverwege twee ver uiteenliggende eenheden te liggen. Deze botsing tussen theoretische veronderstellingen en didactische beperkingen kan aanleiding zijn tot de gesignaleerde verwarring bij vooral de intelligente leerlingen.

Een globale en een locale grafiek

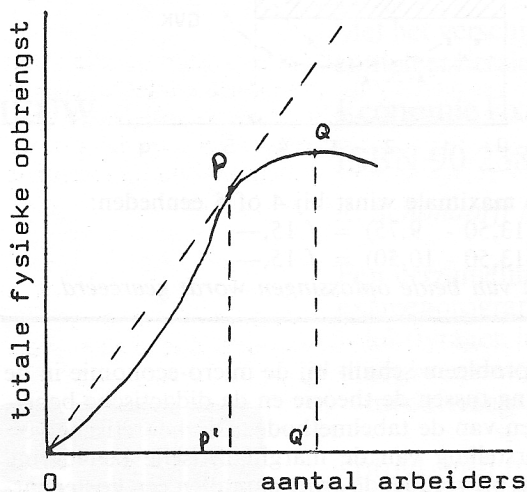
In het bovenstaande werd gesteld dat het gecombineerde gebruik van tabellen, grafieken en verbale tekst het beheersen van vijf vertaalvaardigheden vereist. In schema weergegeven komen er vijf vertaallijnen te staan:



De zesde vertaalmogelijkheid, die van een tekst naar een grafiek, ligt echter wat ingewikkelder. Zij brengt ons op het spoor van een ander didactisch probleem. Economen zijn vaak slordig in het hanteren van wiskundige termen. Met "grafiek" duiden zij nog al eens op twee verschillende wiskundige systemen: de curve of kromme en de grafiek. Een kromme (zie figuur 2) geeft een aantal ken-

Figuur 2

De wet van de toe- en afnemende meeropbrengsten



Een globale grafiek:

O - P': toenemende meeropbrengsten.

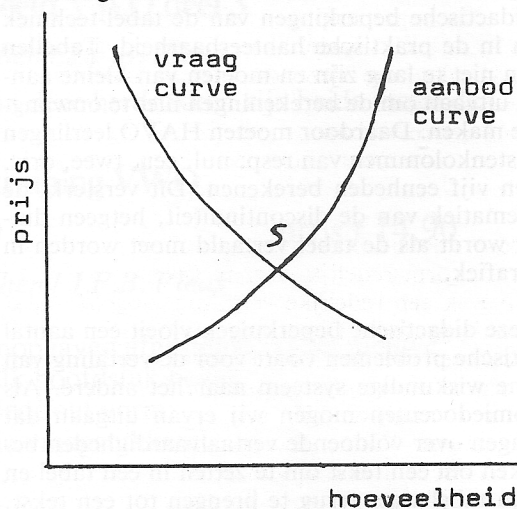
P' - Q': afnemende meeropbrengsten.

merken van een relatie weer: verloop, toename, afname etc. De wet van de toe- en afnemende meeropbrengsten is grafisch uit te beelden zonder dat is af te lezen bij welke concrete hoeveelheid arbeid welke totale fysieke opbrengst hoort. Dat is het doel ook niet van een dergelijke kromme. Zij wil het verloop schetsen en door de visuele weergave van het verband tussen de hoeveelheid arbeid en de fysieke opbrengst de leerlingen ondersteunen in het onthouden van deze fundamentele wet. Wij zullen deze kromme aanduiden als een globale grafiek. Globaal omdat zij een patroon weergeeft dat herkenbaar is in elke correcte toepassing van de curve.

Ook de vraag- en aanbodcurven worden vaak afgebeeld in een globale grafiek (zie figuur 3). Zo'n schets is zeer instructief omdat in één oogopslag het uiteenlopende verband tussen prijs en hoeveelheid van vraag en aanbod wordt weergegeven. De curven kunnen het theoretische verloop zeer nauwkeurig weergeven. Door hun globale karakter worden zij niet gehinderd door wiskundige formules. Formules die de didactische beperkingen hebben dat zij voor leerlingen op hanteerbare wijze het algebraïsch verband tussen de grootheden op de twee assen moeten aangeven.

Figuur 3

De vraag- en aanbodcurve



Een globale grafiek:

De corresponderende waarden zijn niet af te lezen

In de wiskunde is alleen sprake van een grafiek als bij elk punt van de grafiek is af te lezen welke waarden van de variabelen op de assen erbij horen.

Gezien het soms onnauwkeurige woordgebruik van economen zullen wij een dergelijke grafiek aanduiden als een "locale grafiek". Een tabel is dus prima te vertalen in een locale grafiek. En omgekeerd kan uit een locale grafiek een tabel worden afgeleid. Indien de tabel is opgesteld overeenkomstig theoretische inzichten (bij voorbeeld de relatie tussen gevraagde hoeveelheid en de prijs) dan zal dat theoretische inzicht ook blijken in het verloop van de locale grafiek. Ergo de locale grafiek zal een vorm hebben die overeenkomt met de globale grafiek (in casu de vraagcurve).

Het onderscheid tussen locale en globale grafieken komt duidelijk naar voren zodra de grafische benadering algebraïsch ondersteund moet worden. De Stuurgroep Economie HAVO verlangt dit ook en geheel begrijpelijk zoekt zij daarvoor didactisch de meest eenvoudige methode. Zij verlangt dat locale grafieken met behulp van rechte lijnen worden afgebeeld. De wiskundige formules blijven dan elementair en zij leiden de aandacht niet af van de economische berekeningen. Voorbeeld, het bepalen van het snijpunt van de vraag- en aanbodcurve.

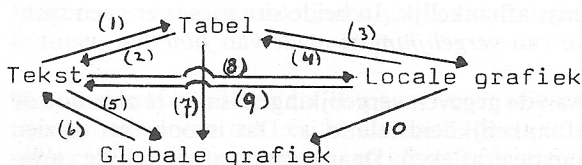
Door deze didactische ingreep (welke op zich goed verdedigbaar is), verliest de locale grafiek zijn gelijkenis met de globale grafiek. De didactische beperking aan het werken met locale grafieken verdringt het theoretisch inzicht dat via de globale grafiek wordt beoogd. De locale grafiek geeft dan geen visuele ondersteuning meer van de economische theorie, maar roept een ander beeld op dan de globale grafiek. Visueel ontstaan twee concurrerende beelden die dezelfde theorie moeten ondersteunen. Bij de vraag- en aanbodcurve betekent dit dat lineaire verbanden een theorie moeten ondersteunen die niet-lineaire verbanden voorschrijft.

De wet van de toe- en afnemende meeropbrengsten is in tabelvorm redelijk weer te geven. Vanuit de tabel is ook een redelijke vertaling mogelijk naar een locale grafiek. Die locale grafiek stemt qua vorm overeen met de globale grafiek (zie figuur 2). De kromme die resulteert ondersteunt het visuele inzicht dat vanuit de tekst van de wet maar moeilijk te vatten is. Vanuit deze consistente benadering is een grafische afleiding van de aanbodcurve zeer goed mogelijk. De kromme die dat oplevert, bevat het economische theorema van de toe- en afnemende meeropbrengsten. Zodra echter deze aanbodcurve om rekentechnische redenen wordt weergegeven in een rechte lijn, verdwijnt de economische wetmatigheid uit de grafiek. De locale grafiek gaat afwijken van de globale grafiek zoals die in figuur 3 staat weergegeven. De wiskunde ondersteunt het

economische inzicht niet meer, maar belemmert het juist.

Daarom is het vanuit economisch gezichtspunt gezien zeer verwonderlijk dat de stuurgroep de grafische afleiding van de individuele aanbodcurve uit het programma wil schrappen, terwijl ze de bewerking van locale grafieken met rechte lijnen wil handhaven. Ze verzwakt daarmee het visuele inzicht in de economische wetmatigheid, die in de globale grafiek tot uiting komt. En ze versterkt de ondermijning van het inzicht die door het lineaire karakter van de locale grafiek bewerkstelligd wordt.

Aan de hand van de hier ontvouwde gedachten-gang dient het eerder gegeven schema met de vijf vertaallijnen uitgebouwd te worden:



Dit schema overziend moet geconstateerd worden dat er van de leerlingen tien vertaalvaardigheden verwacht worden. Zelfs als deze vier wiskundige systemen met elkaar consistent zijn samengebracht is dat al een heel karwei voor de leerlingen. In de praktijk van het economieonderwijs worden vooral de vertaallijnen (1), (3) en (9) veelvuldig geoefend. De overige vertaallijnen verdienen meer aandacht.

Het belang van het leren van deze vaardigheden strekt verder dan de economie alleen. Zij ligt niet alleen in de waarde van de vaardigheden zelf, maar leerlingen die deze vaardigheden beheersen, zijn beter in staat om in nieuwe situaties essentiële informatie te destilleren en te hanteren.

De functie

Herhaaldelijk is in het bovenstaande gesproken over wiskundige formules die nodig zijn om grafieken algebraïsch te ondersteunen. Dat vloeide voort uit de wens van de Stuurgroep Economie HAVO. De beheersing van de bovengenoemde tien vertaalvaardigheden is dus ontoereikend om de richtlijn uit te kunnen voeren. Ook de vertalingen van en naar functies zullen in beschouwing genomen moeten worden.

Echter ook hier liggen nog enkele wiskundige complicaties. Aan de hand van een voorbeeld zullen wij die uiteenzetten. De ontwerpleerstoflijst schrijft

voor dat het marktevenwicht bij volledige mededinging langs algebraïsche en grafische weg bepaald moet worden met behulp van lineaire functies. Gebruikelijk is dan een model dat er als volgt uitziet. Er is een lineair verband tussen de gevraagde hoeveelheid en de prijs: $q_v = -4/3 p + 4$. Als verband tussen de aangeboden hoeveelheid en de prijs geldt: $q_a = p - 1$. De verbanden tussen deze drie variabelen worden zoals gebruikelijk is, weergegeven door middel van vergelijkingen.

Maar is er wiskundig gesproken wel sprake van vergelijkingen? De rol van de variabelen is niet zo gelijkwaardig als deze representatie suggereert: In deze situatie is sprake van collectieve vraag- en aanbodfuncties. De prijs is afhankelijk van de gevraagde en de aangeboden hoeveelheid. Bij individuele vraag- en aanbodfuncties echter is het omgekeerde het geval. Vraag en aanbod zijn dan van de prijs afhankelijk. In beide situaties is er geen sprake van *vergelijkingen* maar van *functies*.

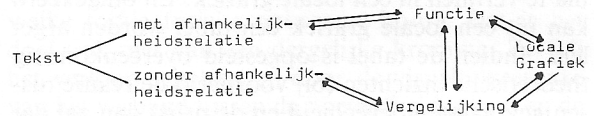
Aan de gegeven vergelijkingen is niet te zien hoe de afhankelijkheidsrelatie is. Dat is ook niet te zien aan de grafieken. Daar staat de afhankelijke variabele soms op de horizontale as en soms op de verticale as. Bij de collectieve aanbodcurve staat de afhankelijke variabele op de horizontale as en bij de individuele aanbodcurve op de verticale as. Door functies te identificeren met vergelijkingen wordt de indruk gewekt dat dit alles niet veel verschil maakt.

Een vergelijking geeft een verband weer tussen *gelijkwaardige* variabelen. Alleen bepaalde combinaties van variabelen voldoen aan de vergelijking. Een grafiek is een visualisering daarvan: door de introductie van een coördinatenstelsel kan een eenduidig verband gelegd worden tussen combinaties van waarden van de variabelen en de punten in het vlak.

Bij een functievoorschrift is er sprake van een afhankelijkheidsrelatie tussen de variabelen. Het voorschrift geeft een algebraïsche beschrijving van de wijze waarop een variabele afhangt van één of meer variabelen. In die zin geeft een functievoorschrift meer informatie dan een vergelijking.

Net als een vergelijking kan een functie gevisualiseerd worden door middel van een grafiek. De grafiek functioneert in veel problemen ten onrechte als een verbinding tussen functie en vergelijking. Dit is wellicht de verklaring dat economen "ongestraft" van het ene wiskundige systeem over kunnen gaan op het andere systeem in casu van de functie op de vergelijking en vice versa.

Ook hier is sprake van vertalingen van een probleem:



Fouten bij de berekening van het snijpunt van twee functies kunnen samen hangen met onvoldoende inzicht in het afwisselend gebruik dat economen maken van deze twee wiskundige systemen (zie figuur 4). Correct taalgebruik kan deze fouten voorkomen.

Figuur 4

1. Uitgaande van functievoorschriften:

$$\text{vraagfunctie } f: x \mapsto -\frac{4}{3}x + 4$$

$$\text{aanbodfunctie } g: x \mapsto x - 1$$

Berekening:

$$-\frac{4}{3}x + 4 = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{4}{3}x - x = -1 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{3}x = 5 \Leftrightarrow$$

$$x = 2\frac{1}{7}$$

$$\text{uit } g: x \mapsto x - 1 \text{ volgt } y = 2\frac{1}{7}, \text{ dus } S = (2\frac{1}{7}, 1\frac{1}{7}).$$

2. Uitgaande van vergelijkingen:

$$\text{vraagvergelijking: } y = -\frac{4}{3}x + 4 \quad (1)$$

$$\text{aanbodvergelijking: } y = x - 1 \quad (2)$$

Berekening:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{4}{3}x = 4 \\ y - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ 4y - 4x = -4 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{rcl} 7y & = & 8 \\ y & = & 1\frac{1}{7} \end{array}$$

$$\text{uit (2) volgt } x = y + 1 = 2\frac{1}{7}, \text{ dus } S = (2\frac{1}{7}, 1\frac{1}{7}).$$

Bij de berekening volgens de eerste methode maken veel leerlingen de volgende fout:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}x + 4 &= x - 1 \Leftrightarrow \\ -4x + 12 &= x - 1 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Het totaal aantal vertaalvaardigheden is dus aanzienlijk groter dan het eerder genoemde tiental. Maar zelfs als we schema 2 en schema 3 ineen schuiven zijn we er nog niet. Want vanuit functies

en vergelijkingen moeten vaak eerst tabellen geconstrueerd worden voordat lokale grafieken zijn te ontwerpen. In figuur 5 is een voorbeeld gegeven, ontleend aan het VWO. Daar staat vanuit de functie van de totale kosten de tabel van de totale kosten en van de marginale kosten berekend. Frappant is dan te moeten constateren dat de marginale kosten berekend volgens de methode van differentiëren een geheel andere uitkomst oplevert, dan volgens de methode van tabellen afleiden uit andere tabellen. (1) Ook hier blijkt dat leerlingen, zelfs als ze de vertaalvaardigheden goed beheersen nog in de problemen kunnen raken.

Figuur 5

Gegeven TIK is $\frac{1}{2} q^3 - 3 q^2 + 10 q + 15$

Bereken MK via differentiëren (1)

Bereken MK via tabelberekening (2)

Oplossing:

(1) MK via differentiëren: $MK = 3/2 q^2 - 6 q + 10$

De berekeningen leveren de volgende waarden op:

q	TIK	MK (2)	MK (1)
0	f 15,—		
1	f 22,50	f 7,50	f 5,50
2	f 27,50	f 4,50	f 4,—
3	f 31,50	f 4,50	f 6,50
4	f 39,—	f 7,50	f 10,—
5	f 52,50	f 13,50	f 17,50

Crijns heeft onlangs in een artikel een ontwikkelingsmodel beschreven waarin de functies van een Harrod-Domar model vertaald werden naar kolommen. Dankzij de computer is een dergelijke aanpak perspectiefvol en is het mogelijk om formules volledig uit te schrijven en de verkorte notatie (Y bijvoorbeeld) weer te vervangen door woorden (inkomen bijvoorbeeld) (2).

Zesentwintig vertaalvaardigheden

Dit alles overziend moeten we constateren dat er vijf verschillende wiskundige systemen gehanteerd worden in de economieles naast de verbale benadering. Het gaat hier om tabellen, curven, (locale) grafieken, functies en vergelijkingen. Tussen deze zes benaderingen moeten voortdurend vertalingen plaatsvinden. Vereist zijn maximaal $(5 \times 2) + (4 \times 2) + (3 \times 2) + (2 \times 2) + (1 \times 2) = 30$ vertaalvaardigheden. Dertig vertaallijnen zouden getekend moeten worden in een schema waar de zes talen van de wiskunde in een kring geordend staan. Van deze dertig vallen er vier af omdat een globale grafiek (curve) zich niet vertalen laat in tabellen, locale grafieken, functies en vergelijkingen, tenzij

de globale grafiek samenvalt met een locale grafiek.

Sommige docenten voegen aan deze rijkdom van vertaalvaardigheden nog een zevenentwintigste toe: die van het optisch bedrog. Om de afstand tussen een locale grafiek met lineaire vraag- en aanbodfuncties en de globale grafiek met correcte krommen te overbruggen, speculeren zij op het visuele effect. Zij trekken bijvoorbeeld een ruime cirkel rond het snijpunt van vraag- en aanbodkromme, met dat snijpunt als middelpunt. Vervolgens tekenen zij rond het middelpunt een kleinere cirkel en wijzend naar het bord, betogen zij dat de stukken vraag- en aanbodcurve die binnen de kleinere cirkel vallen al dichter een rechte lijn benaderen. Dan trekken zij een nog kleinere cirkel. Door dat het lijnstuk korter is, lijkt de kromming inderdaad minder, maar wiskundig is dat niet correct. Met een eenvoudige raakkijnanalyse is dat snel aan te tonen.

Wij moeten constateren dat er maar twee manieren zijn om te zorgen dat een locale aanbodcurve de betekenis van de wet van toe- en afnemende meeropbrengsten op correcte wijze weergeeft. De eerste is het elimineren van de algebraïsche bewerking van de vraag- en aanbodcurven, zodat de verleiding verdwijnt om met lineaire functies te werken als zijnde de eenvoudigste vorm van wiskundig handelen. De tweede is het hanteren van parabolische en hyperbolische functies voor de aanbodcurve en de vraagcurve. Bij het opstellen van het definitieve leerplan voor de HAVO zal bekeken moeten worden hoeveel extra tijd deze tweede benadering vraagt. Het is dan aan de Stuurgroep Economie HAVO om af te wegen of deze tweede benadering ingevoerd moet worden onder het wegschrapen van andere onderdelen uit het programma, of dat zij terug wil vallen op de eerste benadering.

Het accepteren van niet-lineaire functies vereist wel dat een duidelijk definitiegebied voor de vraag- en aanbodcurve wordt aangegeven. Domein en bereik dienen achter elke functie te staan. Dit betekent dan weer dat het voorstel van de Stuurgroep Economie HAVO alsnog in zal moeten gaan op de

- (1) Voor een uitvoerige analyse van deze opgave zij verwezen naar "Het spel met de kortsluitingen" van A. T. J. Vernooij, gepubliceerd in de voorloper van het Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs, het blad EMD, november 1980. Overdrukken zijn bij de redactie aan te vragen.
- (2) H. Crijns "Een ontwikkelingsmodel", Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs, oktober 1985.

doorvoering van de moderne wiskunde in de economieles. Ongetwijfeld zal dit dan ook consequenties hebben voor het leerplan Economie op het VWO.

Literatuur:

A. Moret e.a. "Ze kunnen niet meer rekenen", EMD, 1981 nummer 1.

M. Kindt, J. de Lange Jzn "Functies en grafieken", docentenboekje.

E. Janvier "Use of situations in mathematics educati-

on", Educational studies in mathematics, 1982 nummer 12.

A. van Streun "De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties", Nieuwe Wiskrant, 1983 nummer 4.

Projectgroep Wiskunde 12 - 16, "In verband met ... een introductie op functies via verbanden", SLO, Enschede, 1983.

H. Krabbendam "Globaal of lokaal", Nieuwe Wiskrant, 1982 nummer 4.

J. R. ten Hove "Economie zonder wiskunde en wiskunde met economie?", Nieuwe Wiskrant, februari 1985.