Mentale modellen van leerlingen II

Enkele experimenten om in de klas uit te voeren.

Fons Vernooij

Gepubliceerd in Factor D, 2022, nummer 4, blz 26.

In een eerder artikel (1) over de mentale modellen die leerlingen in hun hoofd ontwikkelen, is ter sprake gekomen hoe een docent via hardop-denk-sessies inzicht kan krijgen in de mentale voorstellingen die leerlingen hanteren binnen de algemene economie en de bedrijfseconomie. Het gaat daarbij zowel om de mentale modellen die leerlingen al hebben voordat zij nieuwe lesstof krijgen als om de modellen die zij verder ontwikkelen tijdens de lessen die zij krijgen.

Maar leerlingen hebben ook verwachtingen over de manier waarop zij vraagstukken moeten aanpakken. Die hangen mede af van de tradities die binnen een vak bestaan om vraagtukken aan te bieden. Het gaat bijvoorbeeld om verwachtingen over het presenteren van opstapvragen om niet de hele bewerking ineens uit te hoeven voeren en van de moeilijkheidsgraad die bij diverse typen vraagstukken hoort, zoals "Dit is zo makkelijk dat zullen ze niet bedoelen".

De structuur van een eenvoudige opgave

Er is een eenvoudige manier om een beeld van te krijgen van de denkwijze van leerlingen via enkele experimenten. Voor het eerste experiment gebruiken we de opgave:

Een ondernemer heeft in een jaar een omzet van € 180.000,-.
De inkoopwaarde van die omzet is € 120.000,-.
De bedrijfskosten dat jaar zijn € 40.000,-.
Bereken de brutowinst en de nettowinst.

Een simpele opgave niet waar? Maar we kleden hem uit door de woorden weg te laten. In wezen verandert dit niets aan de opgave, want de wijze van berekenen (het functievoorschrift) staat niet in de opgave en dus ook niet in de anonieme versie. Schrijf deze opgave verkort op het bord en geef de bijgaande toelichting:

Gegeven is:
a = € 180.000,-
b = € 120.000,-
c = €   40.000,-
Bereken x en bereken y

"Nu denken jullie vast: daar kan ik niks mee. Maar stel je voor dat je op een proefwerk zit en je krijgt zo'n soort som. Wat doe je dan? Je weet dat je 0 punten scoort als je niets invult. Als je wat gokt kun je 5 punten krijgen als er een antwoord goed tussen zit en 10 punten als ze allebei goed zijn. Wat doe je dan?"

Kijk eens welke uitkomsten de leerlingen zoal bedenken en hoe vaak elk van die uitkomsten voor komt. Vraag dan ook welke gokstrategie zij gebruikt hebben (2).
Bijvoorbeeld:

- Ik dacht dat ik a en b bij elkaar moest optellen om x te krijgen en daarna c bij x om y te krijgen. (Gevolg, zowel x als y zijn fout.)
- Nou, ik weet dat je vaak het verschil tussen twee grootheden moet bepalen. Dus ik dacht ik neem het eerste getal en trek het tweede ervan af. Dat zal dan wel het

antwoord op x zijn. Als ik c er ook al aftrek heb ik geen gegevens meer over om y te berekenen. Dus dan zal y wel x minus c zijn. (Gevolg, zowel x als y zijn goed.)
- Nou, ik kom bij beide antwoorden tot € 20.000,-. Dan weet ik wel dat een van de twee fout is, maar ik weet zeker dat een van de twee € 20.000,- is, dus dan heb ik in elk geval de helft van de punten.

Vervolgens kun je de opgave zonder opsmuk presenteren:

Gegeven is voor een bepaald jaar:
De omzet = € 180.000,-
De inkoopwaarde van de omzet = € 120.000,-
De omvang van de bedrijfskosten = € 40.000,-
Bereken de brutowinst en bereken de nettowinst.

Veel leerlingen zullen de opgave nu gerichter aanpakken en de juiste brutowinst en nettowinst berekenen. Zij kunnen zich een voorstelling maken van de betekenis van de gegeven data en de gevraagde grootheden. De voorstelling bij elk van de afzonderlijke grootheden maakt het voor velen ook mogelijk om een mentale voorstelling te maken van de samenhang tussen die grootheden. Dat betekent dat zij zelf het functievoorschrift kunnen bedenken dat als meest vanzelfsprekende naar voren komt bij het aanpakken van dit vraagstuk.

Maar ook nu blijft het mogelijk dat een leerling niet de juiste uitkomst vindt door het juiste functievoorschrift te bedenken, maar door te gokken. Daarom is het goed om aan de hand van de antwoorden die leerlingen gaven bij het anonieme vraagstuk een lijstje op te stellen van gokstrategieën die zijn gebruikt door de leerlingen. Dat lijstje is uit te breiden met goede en slechte gokstrategieën door een versie van het vraagstuk aan te bieden die een stap moeilijker is.

Verhogen van de moeilijkheidsgraad van een vraagstuk.
"Kijk nu eens goed naar het volgende vraagstuk en schrijf op wat je denkt dat de uitkomsten voor x en y zijn:"

Gegeven is:
a = € 120.000,-
b = €   40.000,-
c = € 180.000,-
Bereken x en bereken y

Ja, dan wordt het lastig. De goede antwoorden zijn nog steeds x = € 60.000,- en y = € 20.000,-. Maar hoeveel leerlingen komen op deze uitkomsten? De moeilijkheid zit hem niet in het veranderen van het functievoorschrift, want dat blijft x = € 180.000,- - € 120.000,- en y = € 60.000,-, maar in het wijzigen van de volgorde van de gegevens. Kijk maar:

Gegeven is voor een bepaald jaar:
De inkoopwaarde van de omzet = € 120.000,-
De omvang van de bedrijfskosten = € 40.000,-
Terwijl de waarde van de omzet = € 180.000,-
Bereken de brutowinst en bereken de nettowinst.

De leerlingen die als strategie hadden om het eerste getal te nemen en daar het tweede op in mindering te brengen, gaan nu de mist in. Maar degenen die eraan dachten om het grootste getal te nemen en daar het op-een-na-grootste vanaf te halen, komen goed uit bij het berekenen van de x. Voor het berekenen van de y blijft dan als enige mogelijkheid over om het getal b van x af te trekken.

En daarin ligt de kern van vooral de bedrijfseconomische vraagstukken. Bij de algemeen economische vraagstukken is vaak nog expliciet een functievoorschrift gegeven door bijvoorbeeld de formule voor een vraag- en een aanbodcurve. Maar ook bij algemene economie kan het vraagstuk soms een deel of het geheel van het functievoorschrift weglaten. De leerlingen moeten dat dan zelf bedenken en het vraagstuk aanvullen zodat een compleet functievoorschrift ontstaat.

Varianten op de bovenstaande experimenten
Het is niet zo moeilijk om varianten te bedenken op de bovenstaande anonieme vraagstukken en kijken wat leerlingen daarmee doen. Bijvoorbeeld de berekening van het interestresultaat waarbij de gewenste interest over het totale vermogen verminderd wordt met de betaalde rente over het vreemde vermogen:

Gegeven is:
a = 10%
b = € 180.000,-
c = 12%
d = € 100.000,-
Bereken x, bereken y en bereken z.

De kans is groot dat de meeste leerlingen op basis van de eerdere ervaringen dit vraagstuk goed oplossen en tot de conclusie komen x = € 18.000,-, y = € 12.000,- en z = € 6.000,-. Ook al zullen er zijn die zeggen: z = € 30.000,-. Maar ook die hebben dan nog een voldoende voor dit vraagstuk, want twee op de drie antwoorden zijn goed. Op zo'n soort vraagstuk zei een leerling ooit tijdens een hardop-denk-sessie: "Als ik zoveel getallen zie, dan reken ik alvast wat uit en als ik dan naar de vragen kijk, staat er meestal al iets goeds op papier."

Soms heeft een leerling niet veel keus bij het uitwerken van de gegevens. De presentatie van de gegevens in volgorde van gebruik suggereert een volgorde in de bewerking. Een percentage kun je niet optellen of aftrekken bij een eurobedrag, je kunt ze ook niet delen op elkaar, machtsverheffen of worteltrekken, dus wat overblijft is een vermenigvuldiging. Daar heb je geen functievoorschrift voor nodig. Daarom staat het functievoorschrift ook niet in een opgave over het interestresultaat, want dan zou het vraagstuk wel erg gemakkelijk worden.

En dat is de essentie van deze experimenten. Je kunt als docent de leerlingen laten zien waar de grens ligt tussen gokken en kennis toepassen. De economische termen geven niet alleen aan waar het over gaat, maar ook wat je er wel en niet mee kunt doen. Welke handelingen mogelijk zijn met die grootheden. Maar ook welke beperkingen er zijn aan de wiskundige bewerkingen binnen het vakgebied en dat daardoor gokstrategieën de overhand kunnen krijgen.

Hoe de verbanden tussen de grootheden liggen is nog te onderstrepen door de leerlingen te vragen na afloop van een opgave de getallen zwart te maken. Op een proefwerk krijg je nooit meer dezelfde getallen, ook als is de opgave identiek. Dus hoef je die niet te leren.

Wat staat er bijvoorbeeld na het uitwerken van een vraagstuk in je schrift?
Als een leerling opschrijft:

Omzet	*€ 180.000,-*
min inkoopwaarde omzet	*€ 120.000,-*
= brutowinst	*€ 60.000,-.*

Dan staat er na het zwart maken van de getallen iets om te onthouden voor het proefwerk:

Omzet	*€ xxx*
min inkoopwaarde omzet	*€ xxx*
= brutowinst	*€ xxx .*

Maar als de leerling alleen de getallen opschrijft, wat op zich handiger is, dan staat er:

Brutowinst = € xxx min € xxx = € xxx.

Het heeft geen zin om dat te onthouden.

Het gegevensadagium

Henny van Dongen en Elsbeth van der Meche (3) hebben in hun artikel "Mentale Modellen" de vraag opgeworpen welke mentale voorstellingen docenten als vanzelfsprekend hanteren bij het uitvoeren van hun vak. Is economische groei wel een vanzelfsprekende verklaring voor nieuwe initiatieven? Is winstmaximalisatie wel de doelstelling van elk bedrijf?

Het onderzoek naar de mentale voorstelling die docenten maken is een belangrijke switch in de vakdidactiek. Die switch opent de mogelijkheid om ook de mentale modellen van leerlingen te bekijken. In een eerste reactie op hun artikel heb ik daar openingen voor gezocht (4).

De insteek van dit artikel is het uitproberen van verrassende invalshoeken om meer beeld te krijgen van de wijze waarop leerlingen vraagstukken aanpakken. Daarbij kunnen leerlingen naast het traditionele afkijken meer vaardigheden ontwikkelen om de juiste antwoorden te vinden. Voor een deel bestaat die mogelijkheid dankzij geheime afspraken tussen auteurs en leerlingen, zoals het gegevensadagium (5).

Dit adagium houdt in dat de auteur belooft om geen overbodige gegevens in een vraagstuk te stoppen onder de stilzwijgende afspraak dat de leerlingen niet zullen zeggen dat een opgave onoplosbaar is, omdat een gegeven ontbreekt. Het gegevensadagium betekent dus dat een leerling het moet doen met de alle gegevens die in een opgave staan, maar dat er ook altijd een uitkomst uit rolt die goed of fout is.

Referenties

1. Vernooij, F. Mentale modellen van leerlingen I, Onderzoek via hardop-denk-sessies, Factor D, 2022, nummer 4.
2. Geraadpleegd van Vakdidactiek-Bedrijfseconomie.nl pagina 'Gokstrategieën om vraagstukken op te lossen' bij 'Kennis van strategieën'.
3. Van Dongen, H. en Van der Meche, E. *Mentale Modellen*, Factor D, 2020, nummer 1, blz 13
4. Vernooij, F. *Een mentaal model van vakdidactiek*. Factor D, 2022, nummer 2, blz. 17.
5. Geraadpleegd van Vakdidactiek-Bedrijfseconomie.nl pagina 'Het Gegevensadagium' bij 'Kennis van strategieën'.

Fons Vernooij was vakdidacticus bedrijfseconomie bij het ILO en is nu met pensioen.