Probleemoplossen als vaardigheid

Zelfstandig leren binnen het studiehuis vereist van leerlingen dat zij de vaardigheid ontwikkelen om zelf oplossingen te zoeken voor problemen waar zij tegen aan lopen. Zij kunnen niet voortdurend aan de docent vragen wat zij moeten doen, maar zullen zelf systematisch te werk moeten gaan. De centrale vraagstelling is niet langer; 'Wat komt er uit?', maar 'Hoe pak ik het aan?'

Voor het economisch onderwijs heeft dit vergaande gevolgen, met name als het gaat om calculatorische vraagstukken. Het gaat er niet langer om dat docenten de uitkomst voorrekenen, maar dat zij denkstappen aanreiken waarmee een leerling zelfstandig het oplossingspad kunnen ontwerpen. Van oudsher is het lesmateriaal sterk voorgestructureerd en vervulde de docent de rol van instructeur. Binnen het studiehuis verschuift die rol naar de rol van coach. Opvallend daarbij is dat de kennis van strategieën om problemen op te lossen reeds beschreven staat in het examenprogramma voor M&O, zowel bij HAVO als VWO. De bouwstenen voor een systematische probleemaanpak zijn dus al beschikbaar in de vorm van eindtermen voor het lesprogramma.

Door Fons Vernooij

Het oplossen van problemen kan betrekking hebben op verschillende soorten problemen. Bij algemene economie gaat het meestal om redeneringen die leerlingen op een of andere manier moeten formuleren. Bij bedrijfseconomie gaat om berekeningen die de leerlingen op grond van een korte probleembeschrijving moeten uitvoeren. Aan die berekeningen kunnen formules ten grondslag liggen of zij kunnen bestaan uit een reeks gegevens die op een of andere manier gecombineerd moeten worden tot een rekenkundige bewerking.
Een formule is een functievoorschrift waarbij de juiste data in de juiste parameters gestopt moeten worden. Bij rekenkundige bewerkingen is er wel een samenhangend geheel maar het functievoorschrift zit ergens in de opgave verstopt. De leerlingen moeten dat voorschrift achterhalen voordat zij een berekening stap voor stap uit kunnen voeren. Om ze op weg te helpen geeft de auteur van een leerboek vaak een voorbeeld.

Waar is een voorbeeld een voorbeeld van?
Het voorbeeld is een rekenkundige uitwerking van een model dat verscholen zit in de opgave. Een voorbeeld is immers een specifieke toepassing van iets dat algemener van aard is. In feite moeten leerlingen alle getallen weghalen uit het voorbeeld en bekijken wat dan overblijft. Dit geraamte levert een *algoritme* op dat in de aansluitende opgaven in allerlei variaties terugkomt.
Het aardige van een dergelijk geraamte is dat de berekeningen zijn uit te breiden of om te keren. Na bijvoorbeeld eerst de aanschafprijs, de restwaarde en de levensduur van een machine gegeven te hebben, kan de auteur van een boek vragen om de afschrijvingskosten per maand uit te rekenen. Vervolgens kan deze fundamentele opgave uitgebreid worden (door de uitgaven voor installatie of sloop toe te voegen) of door de redenering om te keren. Hoe hoog was bijvoorbeeld de aanschafprijs als de afschrijvingskosten, de restwaarde en de levensduur van een machine bekend zijn? Of hoe groot is de levensduur? Of de restwaarde? Steeds kunnen de getallen variëren, maar het geraamte uit het voorbeeld blijft bestaan als model dat in uiteenlopende vormen terugkeert in de aansluitende opgaven. Die systematiek geldt niet alleen voor de afschrijvingsproblematiek maar ook voor de berekening van de gewenste verkoopprijs, of de nettowinst of enig ander thema uit de bedrijfseconomie.

De kern van een probleem
In wezen ligt aan bijna elk rekenkundig probleem binnen de bedrijfseconomie een conceptueel model ten grondslag. Dat wil zeggen dat er een reeks concepten is die met elkaar een samenhangend geheel

Fons Vernooy achter de computer

vormen. Elk concept is een grootheid met een naam, een waarde en een eenheid. Het handige is daarbij dat een model te vereenvoudigen is door in een opgave slechts een fragment uit het model te verwerken of door een grootheid de waarde 0 toe te kennen, waardoor die grootheid buiten beschouwing blijft.

Een auteur van lesmateriaal kan via een reeks van opgaven samenhangende fragmenten aan de orde stellen en er zo naar streven dat leerlingen in hun hoofd de fragmenten op correcte wijze aaneen rijgen tot een volwaardig model. Ook het toevoegen van vragen of opdrachten waarin variabelen voorkomen die eerst de waarde 0 hadden, biedt de mogelijkheid om leerlingen geleidelijk het zicht bij te brengen op het totale model.

De basis voor een systematische probleemaanpak ligt in de notie dat al die rekenkundige sommetjes uiteindelijk tot doel hebben dat leerlingen in hun hoofd een integratie tot stand brengen tussen de concepten die ze tegenkomen. Herhalen van berekeningen heeft niet tot doel om cijfers te produceren en die te onthouden, want in nieuwe vraagstukken of in toetsen komen nooit dezelfde getallen voor. De bedoeling is steeds om samenhang te zien tussen concepten en om die samenhang te benutten om nieuwe problemen aan te pakken. Hoe beter een leerling erin slaagt om van uit de fragmenten goede conceptuele modellen op te bouwen, hoe beter een leerling in staat is om steeds complexere problemen op te lossen.

Eigenlijk zou elk vraagstuk moeten eindigen met reflectie op het oplossingsproces. Wat moet je van dit vraagstuk onthouden? Schrap de getallen eens weg uit je uitwerking en kijk wat je dan overhoudt. Plaats de staffel eens naast andere staffeltjes die je gemaakt hebt in andere sommen en vergelijk die met elkaar. Waar zitten overeenkomsten en waar zitten verschillen? Kun je de staffeltjes ineen schuiven tot grotere gehelen? Kortom, hoe integreer je de kennis die je in deze opgave hebt opgedaan met de kennis die je in eerdere opgaven al verworven hebt?

De bedoeling is steeds een samenhang te zien

Een systematische probleemaanpak

Probleem oplossen als vaardigheid vereist een goede systematiek om vraagstukken aan te pakken. Die systematiek geeft aan welke stappen op een of andere manier doorlopen moeten worden om tot een succesvol resultaat te komen. Het zijn echter geen chronologische stappen, maar *logische* stappen. Dat wil zeggen dat het in de praktijk niet zo is dat iemand stap 1 van het proces helemaal afrondt voordat hij of zij aan stap 2 begint. Meestal worden stappen slechts half doorlopen en pas als iemand de draad kwijt is, springt hij terug naar eerdere stappen om de draad weer ergens op te pakken. Chronologisch is er dus een wisselwerking die zoekend en tastend moet leiden naar een eindresultaat waar uiteindelijk toch alle logische stappen afgerond zijn.

Bij het oplossen van calculatorische problemen gaat het in wezen om zes logische stappen die leerlingen moeten uitvoeren:

1. *Oriëntatie op het probleem*: wat wordt er eigenlijk gevraagd?
2. *Analyse van het probleem*: hoe ligt het verband tussen de onbekende en de beschikbare gegevens?
3. *Planning van de uitwerking*: welke rekenstappen moet ik in welke volgorde zetten?
4. *Berekening van de uitkomst*: welke getallen vul ik in de diverse rekenstappen in?
5. *Controle van het proces*: heb ik niks vergeten of verkeerd gedaan?
6. *Evaluatie van het resultaat*: wat heb ik geleerd en hoe past dit in kennis die ik eerder heb verworven?

Deze systematiek van probleemoplossen is bij de formulering van het examenprogramma voor M&O vastgelegd in domein A van de examenstof bij de ‘Vaardigheden en werkwijzen’ (1). Deze eindtermen zijn in een apart kader bij dit artikel geplaatst. De oorspronkelijke tekst uit het examenprogramma is hier en daar omgezet naar leesbaar Nederlands en voorzien van cursieve kopjes. In het onderstaande volgt een toelichting op elke stap. Terloops staan kanttekeningen over de vormgeving van het lesmateriaal. De vaardigheid om problemen op te lossen komt immers beter uit de verf als de vraagstukken die de leerlingen krijgen voorgeschoteld, ook zo zijn geschreven dat de stappen in het oplosproces duidelijker tot hun recht komen.

De inspiratie voor de ontwikkeling van een visie op probleemoplossen komt van een verzuchting die ik als docent regelmatig hoorde van leerlingen: ‘Als u het uitlegt, snap ik het helemaal. Maar als ik zelf zo’n som moet maken, weet ik niet waar ik moet beginnen.’ De kunst van het docentschap is dus niet om de berekening van de uitkomst (stap 4) voor te doen, maar om de drie voorafgaande stappen duidelijk te maken, zodat leerlingen zelf kunnen bedenken hoe de berekening moet plaatsvinden.

Een voorbeeldopgave
De bespreking van de stappen vindt plaats aan de hand van een voorbeeld over de break-evenanalyse. Maar evengoed had een ander thema, zoals de berekening van de gewenste verkoopprijs of de bepaling van de boekwaarde van een machine, gekozen kunnen worden. Het voorbeeld is een voorbeeld van de manier waarop de systematiek van probleemoplossen is toe te passen. Tegelijk is het een voorbeeld van de manier waarop volgens de bedrijfseconomische traditie vraagstukken zijn opgebouwd met help- en antihelpstrategieen om de aansturing van de leerlingen te beheersen.
Een *helpstrategie* is een poging van de auteur om bijna ongemerkt het probleem voor de leerlingen te vereenvoudigen, terwijl een *anti-helpstrategie* tot doel heeft om een vraagstuk lastiger te maken. Een traditionele anti-helpstrategie dat in bijna elk bedrijfseconomisch vraagstuk voorkomt, is het ontbreken van een functievoorschrift. Leerlingen moeten dat zelf toevoegen. Daarvoor dient dan als helpstrategie weer het voorbeeld waaruit de leerlingen een algoritme kunnen halen.
Ook het vermijden van overbodige gegevens is een helpstrategie, evenals het ordenen van de gegevens in de volgorde van gebruik. Om het toch weer moeilijk te maken voor leerlingen is een beproefde antihelpstrategie om problemen samen te voegen tot een cluster waarover een aantal vragen worden gesteld die de leerlingen dwingen te kiezen welke gegevens voor welke vraag nodig zijn.
Leerlingen die hun huiswerk maken of op school

Probleemoplossen in het studiehuis

zelfstandig werken, kunnen niet tussendoor vragen stellen aan de auteur over de stappen die zij in een berekening moeten nemen.
De meest traditionele helpstrategie om daaraan tegemoet te komen, is om deelvragen te stellen. De auteur komt de leerlingen te hulp door eerst een vraag te stellen over een of meer tussenresultaten voordat hij een vraag stelt over het eindresultaat. Daarmee geeft de auteur de volgorde prijs van de stappen die nodig zijn om het probleem aan te pakken. Dat ondermijnt de doelstelling om te leren zelfstandig problemen op te lossen. Maar ook daarop is weer een anti-helpstrategie bedacht zoals in onderstaand voorbeeld zal blijkt.
Het schrijven van vraagstukken bestaat dan ook uit het afwegen van helpstrategieën en anti-helpstrategieën. In onderstaand voorbeeld komen de meeste van die strategieën tot uitdrukking.

‘Een handelaar verwacht in de maand mei 2000 eenheden product te verkopen voor € 10,- per stuk. De inkoopwaarde van de producten is € 6,- en de variabele kosten zijn € 1,50 per stuk. De constante kosten bedragen € 4.000,- per maand.
Gevraagd:
1. Hoe groot is de brutowinst in mei?
2. Hoe groot is de nettowinst in mei?
3. Welke prijs moet hij vragen als hij € 3.000,- wil verdienen in de maand mei, ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten en de afzet niet veranderen?
4. Hoeveel stuks zou hij moeten verkopen als hij € 3.000,- wil verdienen bij een prijs van € 10,- per stuk ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten niet veranderen.’

De logische stappen in het oplossen van een probleem

Stap 1: Oriëntatie
De eerste stap is de oriëntatie op het probleem. Leerlingen moeten zich afvragen wat er precies staat en wat er precies van hen verwacht wordt. Enerzijds gaat het om de bedrijfseconomische begrippen die er staan en die in de voorafgaande tekst behandeld moeten zijn. Termen als brutowinst, nettowinst, variabele kosten, constante kosten, afzet en prijs moeten bekend zijn om het vraagstuk aan te kunnen pakken.
Anderzijds gaat het om de structuur van het vraagstuk en het samenspel tussen helpstrategieën en antihelpstrategieën. Vraag 1 is een opstap naar vraag 2, maar vraag 2 is geen opstap naar vraag 3 en 4. Het vragen naar een tussenstap in de berekening van de nettowinst is een helpstrategie om de opgave te vereenvoudigen, maar anderzijds is de wijze van nummeren een anti-helpstrategie van de auteur om het

vraagstuk moeilijker te maken. In feite zijn twee problemen samengevoegd. Dit laatste is een anti-helpstrategie. Op die manier is een deel van de gegevens in de vragen verstopt. Het vraagstuk moet als volgt gelezen worden.

‘Een handelaar heeft een probleem, want hij wil een schatting maken van zijn winst. Daarvoor heeft hij de volgende gegevens verzameld. De verwachte afzet voor de maand mei is 2000 eenheden product te verkopen voor € 10,- per stuk. De inkoopwaarde van de producten is € 6,- en de variabele kosten zijn € 1,50 per stuk. De constante kosten bedragen € 4.000,- per maand.

1. a. Hoe groot is de brutowinst in mei?
   b. Hoe groot is de nettowinst in mei?

De handelaar heeft nog een probleem, want hij wil ten minste € 3.000,- winst maken in mei. Dat kan door de prijs te variëren of de afzet.

2. a. Hoe groot is de gewenste prijs die moet hij vragen, ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten en de afzet niet veranderen?
   b. Hoeveel stuks zou hij moeten verkopen bij een prijs van € 10,- per stuk ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten niet veranderen?’

Stap 2: Analyse

De tweede stap in het oplossingsproces is het vinden van een pad dat leidt van de beschikbare gegevens naar de onbekende grootheid. Dit is voor ondernemers een onnatuurlijke probleemsituatie. Zij starten met een probleem en moeten eerst zelf bedenken welke gegevens nodig zijn om het probleem op te lossen. Daarom starten zij altijd met een onbekende grootheid en moeten eerst beredeneren welke gegevens zij in de oplossing moeten betrekken. Zij leggen dus al verband tussen de onbekende grootheid en de vereiste data *voordat zij de bijbehorende getallen verzamelen*.

Leerlingen krijgen via hun leerboek eerst een rijtje data en pas tot slot volgt een vraag waaruit het probleem blijkt. Dat komt omdat leerlingen werken met leerboeken en auteurs kunnen geen gegevens achterhouden tot leerlingen erom vragen. Daarom lopen zij op de probleemsituaties vooruit en geven alle data prijs die nodig zijn voor de oplossing van het probleem. In de herformulering van het vraagstuk is hieraan in zekere mate al tegemoet gekomen, maar fundamenteel blijft de onnatuurlijke situatie toch gewoon voortbestaan.

Wat dat betreft zou een computerprogramma op totaal andere wijze vraagstukken kunnen aanbieden. Een computer kan gegevens vasthouden tot leerlingen erom vragen. Een vraagstuk begint dan niet met een opsomming van gegevens met tot slot de vraag om iets uit te rekenen, maar op het scherm komt eerst het probleem. Leerlingen zouden via een interactieproces moeten aangeven welke data zij denken nodig te hebben om het vraagstuk aan te pakken. Pas als de leerlingen de goede data noemen, geeft de computer de getallen die erbij horen. Zodoende zien zij eerst de samenhang tussen de onbekende grootheid en de data, voordat zij kunnen beginnen met rekenen.

In het gegeven voorbeeld zijn feitelijk drie onbekende grootheden: de verwachte nettowinst, de gewenste prijs en de gewenste afzet. De drie paden die leiden van de data naar deze drie onbekende grootheden staan niet in het vraagstuk beschreven. Dat had bij de gewenste afzet bijvoorbeeld gekund door de formule voor de afzet te geven. De leerlingen moeten dus op een of andere manier steeds zelf het pad verzinnen.

Docenten hebben de oplossingspaden op voorhand al in hun hoofd en anders staat het wel in een antwoordenboek dat zij tijdens de les of bij het voorbereiden raadplegen. Leerlingen moeten het pad herleiden vanuit een of ander conceptueel model dat ze eerder verworven hebben. Zij moeten aan de hand van termen die in gebruik zijn, onderkennen om welk model het gaat. Zij moeten dus een model kiezen waarin termen voorkomen zoals variabele kosten, constante kosten, brutowinst en nettowinst.

Voor brutowinst en nettowinst zijn verschillende modellen beschikbaar [(2)], maar de methode van de brutowinstopslag en de nettowinstopslag valt direct af. Die modellen zijn gebaseerd op een functionele kostenindeling (inkoopkosten, algemene kosten en verkoopkosten) en daarover is niets bekend.

Vanwege de variabele en constante kosten blijven twee modellen over: een micro-economisch model (zie figuur 1) en een bedrijfseconomisch model (zie figuur 2). Beide modellen zijn in principe veel uit-totale winst

totale opbrengst - totale kosten

afzet x verkoopprijs ex. BTW

variabele kosten + constante kosten

afzet x inkoopprijs + kosten p.s.

Figuur 1 De berekening van de nettowinst volgens de micro- economische benadering

nettowinst

brutowinst - totale kosten

omzet - inkoopwaarde omzet

variabele kosten + constante kosten

afzet x verkoop-prijs

afzet x inkoop-prijs

afzet x variabele kosten p.s

inkoopkosten
+ algemene kosten
+verkoopkosten

Figuur 2 De berekening van de verwachte nettowinst op basis van de constante en variabele kosten

gebreider, omdat de variabele kosten en de constante kosten zijn uit te splitsen naar de functionele kosten die eraan ten grondslag liggen.

Dit geraamte levert een algoritme op

Bij de micro-economie valt de inkoopprijs onder de variabele kosten. Daardoor is het niet mogelijk een brutowinst te berekenen en dus valt de keuze op het bedrijfseconomische model. Ditzelfde model is ook voor het tweede probleem te gebruiken, zij het dat een kleine wijziging in de ordening van het model tot een meer overzichtelijke probleemsituatie leidt. Daardoor ontstaat figuur 3. Ook dit model is uitgebreider, maar voor probleem 2 is dit fragment voldoende. Het is een volledig Probleem Analyse Diagram (PAD) en geeft aan langs welke rekenstappen je van de gegevens bij de onbekende grootheid kunt komen.

nettowinst

dekkings-bijdrage - constante kosten

bruto-winst - variabele kosten

omzet - inkoopwaarde omzet

afzet x variabele kosten p.s.

afzet x verkoop prijs

afzet x inkoop-prijs

Figuur 3 De berekening van de verwachte nettowinst volgens de break-evenanalyse

Stap 3: Planning
Voor de verdere uitwerking van de twee problemen is het mogelijk om aan de hand van het PAD tot een aantal algoritmes te komen. Een *algoritme* geeft aan welke rekenkundige stappen uitgevoerd moeten worden om met zekerheid tot de juiste uitkomst te komen. Dat algoritme is geen probleem meer, zodra het PAD bekend is. In feite is in stap 2 het probleem al opgelost. Als je weet hoe je van de beschikbare gegevens bij de onbekende grootheid moet komen, dan heb je geen probleem. Hooguit is er nog wat redeneerwerk en wat cijferwerk nodig, maar een probleem is er alleen als je niet weet hoe je verder moet gaan om de situatie te beheersen.

Bij het eerste probleem is het pad simpel. De nettowinst is de centrale grootheid in het model en die is tevens de onbekende. Daardoor loopt het oplossingspad van beneden naar boven. Eventueel zijn wat herschikkingen mogelijk, maar het algoritme leidt bij juist gebruik onherroepelijk tot de juiste uitkomst.

- Omzet = afzet x verkoopprijs
- Inkoopwaarde omzet = afzet x inkoopprijs
- Brutowinst = omzet – inkoopwaarde omzet
- Variabele kosten = variabele kosten per stuk x afzet
- Totale kosten = variabele kosten + constante kosten
- Nettowinst = brutowinst – totale kosten.

De vraag naar de brutowinst, is dus inderdaad een helpstrategie, omdat het algoritme gesplitst wordt in twee gelijkwaardige delen. De leerlingen hoeven niet meer zelf het hele traject te bedenken en het probleem is dus gedecimeerd als probleem.

Het bovenstaande algoritme geeft aan hoe de *rekenkundige bewerking* van de oplossing in elkaar steekt. Dat wil zeggen dat alle tussenresultaten daadwerkelijk berekend worden. Naast de rekenkundige aanpak is er echter ook een *wiskundige bewerking* mogelijk. Daarbij worden de tussenresultaten zoveel mogelijk overgeslagen. Uit het model is een formule af te leiden waarin de onbekende grootheid direct gerelateerd wordt aan alle beschikbare data:

1.a Brutowinst = afzet x verkoopprijs – afzet x inkoopprijs.
1.b Nettowinst = brutowinst – afzet x variabele kosten per stuk – constante kosten.

Bij het tweede probleem is het wat lastiger om het oplossingspad te formuleren. De nettowinst blijft de centrale grootheid in de berekening. Maar zij is nu niet langer de onbekende, maar heeft een gegeven waarde. De handelaar wil in elk geval € 3.000,- nettowinst maken. Daarom moet er een herleiding plaatsvinden vanuit de centrale grootheid naar één van de oorspronkelijke data. Dat betekent dat een aantal rekenkundige bewerkingen omslaat in hun inverse. Aftrekken wordt optellen en vermenigvuldigen wordt delen.

Het *analysepad*, dat loopt van de onbekende grootheid naar de data luidt voor vraag 2.a (de cursieve grootheden zijn onbekend. De andere zijn gegeven.):

- *Gewenste verkoopprijs* = *omzet* / afzet
- *Omzet* = *inkoopwaarde omzet* + *brutowinst*
- *Inkoopwaarde omzet* = afzet x inkoopprijs
- *Brutowinst* = *variabele kosten* + *dekkingsbijdrage*
- *Variabele kosten* = afzet x variabele kosten per stuk
- *Dekkingsbijdrage* = gewenste nettowinst + constante kosten.

Vermijden van overbodige gegevens in een helpstrategie

Na de vaststelling van het analysepad is de samenhang tussen de onbekende grootheid en de data bekend. Het probleem is opgelost. De uitkomst is alleen nog niet bekend. Om die te vinden kunnen de leerlingen ook nu weer op twee verschillende wijzen een planning van het oplossingsproces maken:
- door toepassing van de rekenkundige methode, dus de stappen te benoemen die successievelijk moeten worden uitgevoerd, onder vermelding van de te berekenen tussenresultaten;
- door toepassing van de wiskundige methode, dus een vergelijking af te leiden onder weglating van de tussenresultaten.

De rekenkundige methode leidt tot een *oplossingspad* dat omgekeerd verloopt aan het *analysepad*. Immers de analyse begint bij de onbekende grootheid, terwijl de oplossing begint bij de combinatie van bekende data. In deze vertaalslag schuilt het dilemma van de leerling die verzucht: ‘Als u het uitlegt, snap ik het helemaal, maar als ik zelf zo’n vraagstuk moet maken weet ik niet waar ik moet beginnen.’ Die leerling heeft niet de vaardigheid ontwikkeld om te ontdekken hoe het analysepad eruit ziet en is dus ook niet in staat om dit pas op te draaien en daarmee het oplossingspad te formuleren. Het oplossingspad langs de rekenkundige weg luidt dus (ook nu weer staan de onbekende grootheden cursief):

- *Dekkingsbijdrage* = gewenste nettowinst + constante kosten.
- *Variabele kosten* = afzet x variabele kosten per stuk

- *Brutowinst* = variabele kosten + dekkingsbijdrage
- *Inkoopwaarde omzet* = afzet x inkoopprijs
- *Omzet* = inkoopwaarde omzet + brutowinst
- *Gewenste verkoopprijs* = omzet / afzet.

De wiskundige methode leidt ook in dit geval tot een *formule* die via substitutie tot stand kan komen:
(1) Gewenste verkoopprijs = (gewenste nettowinst + constante kosten + afzet x variabele kosten per stuk + afzet x inkoopprijs) / afzet.
Ofwel:
(2) Gewenste verkoopprijs = (gewenste nettowinst + constante kosten) / afzet + variabele kosten per stuk + inkoopprijs.

Deze exercitie voorkomt een hoop rekenwerk, maar vereist wel enige zorgvuldigheid op conceptueel niveau.
Bij stap 3 gaat het er dus om dat de leerlingen in gedachten het oplossingspad traceren dat nodig is om vanuit de brij aan data de juiste uitkomst te vinden. Natuurlijk kunnen leerlingen dit niet vanzelf. Chronologisch zullen zij proberen fragmentjes te identificeren en die alvast uit te rekenen om zo bij brokjes en beetjes de uitkomst te vinden. Maar als het doel van het onderwijs is om leerlingen vaardig te maken in het oplossen van problemen, ontkomt een coach er niet aan om aanwijzingen te geven hoe het oplossingspad stap voor stap is te beredeneren. Hoe het oplossingspad ontstaat als omkering van het analysepad. De essentie van didactiek is om een reeks stappen op te splitsen in deeltjes die overzichtelijk zijn. Daarbij gaat het niet zozeer om het splitsen van een algoritme in afzonderlijke stappen, maar vooral om het splitsen van het oplossingsproces in fasen. Bovendien is het mogelijk om te beginnen met kleinere problemen die uit minder rekenstappen bestaan dan in dit vraagstuk zijn weergegeven.

Overigens is er naast *substitutie* nog een tweede manier om de formule af te leiden. Die methode is goed bruikbaar voor vraag 2.b Het is ook mogelijk om het PAD *plat te slaan*. De nettowinst komt dan als grootheid voorop te staan. De berekening, met ditmaal de afzet als enige onbekende grootheid, kan uitgewerkt worden volgens de regels om vergelijkingen met één onbekende op te lossen.
(3) Gewenste nettowinst = *afzet* x verkoopprijs – *afzet* x inkoopprijs – *afzet* x variabele kosten per stuk - constante kosten.
Ofwel:
(4a) Gewenste nettowinst + constante kosten = afzet x (verkoopprijs – inkoopprijs – variabele kosten per stuk).
(4b) Afzet = (gewenste nettowinst – constante kosten) / (verkoopprijs - inkoopprijs + variabele kosten per stuk)

Stap 4: Berekening
Het gebruik van getallen bij de vaststelling van de uitkomst, begint logisch gezien pas in stap 4 van het oplossingsproces. Instructeurs die het oplossingspad al in hun hoofd hebben zitten, hebben sterk de neiging om de uitleg van een vraagstuk te beginnen met de eerste regel van het oplossingspad en daar de grootheden van de bijbehorende waarden te voorzien. Dat lijkt heel simpel en eenvoudig, maar dat is precies de reden waarom leerlingen niet weten waar zij moeten beginnen als ze zelf zo'n vraagstuk moeten maken.
Dat geldt dan met name voor de *omkeringvraagstukken*, dus de vraagstukken waar de centrale grootheid niet als onbekende grootheid wordt opgevoerd, maar als bekende. Zolang het een *fundamentaal vraagstuk* is waar de analyse van boven naar beneden loopt in het model zijn er niet zoveel drempels om over te struikelen. Pas als de bewerkingen omgedraaid moeten worden, ontstaat de verwarring.
Leerlingen die op goed geluk gaan rekenen onder het motto 'Ik combineer alvast wat getallen en dan kijk ik naar de vragen en vaak staat er dan al wat goeds op papier', die zijn vrij succesvol met deze methode zolang het om fundamentele vraagstukken gaat. Vooral als de auteur de gegevens opsomt in de volgorde waarin ze nodig zijn voor de berekening. Dan gaat het meer om 'gericht gokken', dan om 'probleem oplossen'. Sommige leerlingen zijn heel handig in het gericht gokken en halen daar behoorlijke cijfers mee. Maar ja, gericht gokken is geen doel van het onderwijs en probleemoplossen als vaardigheid wel.

In elk geval kan een leerling de uitkomst van een berekening alleen correct hebben, als op een of andere manier de juiste stappen in de juiste volgorde zijn komen te staan. Als een leerling in de tekst van de opgave leest: 'De verwachte afzet voor de maand mei is 2000 eenheden product, te verkopen voor € 10,- per stuk.' dan is het niet moeilijk om vervolgens op goed geluk de afzet met de verkoopprijs te vermenigvuldigen. Wat kunnen leerlingen anders doen? Zij kunnen die twee grootheden niet bij elkaar optellen, noch van elkaar aftrekken, noch delen, machtsverheffen of worteltrekken. Met die bewerking verkleinen de leerlingen wel de *pro-*

Examenprogramma M&O HAVO/VWO

Domein A: Vaardigheden en werkwijzen

Subdomein: Strategische vaardigheden
Onderdeel: kennis van probleemoplosstrategieën

15. De leerlingen kunnen volgens de hierna beschreven systematiek in duidelijke bewoordingen aangeven hoe zij een vraagstuk stapsgewijze aanpakken.

16. Stap 1: Oriëntatie
Gegeven een vraagstuk dat termen bevat die behandeld zijn, kunnen leerlingen de semantische betekenis van de termen aangeven en daarmee een correcte inhoudelijke beschrijving geven van de probleemstelling van het vraagstuk.

17. Stap 2: Analyse
Gegeven de in bijlage 2 omschreven modellen kunnen leerlingen aan de hand van één of meer signaalwoorden vaststellen welk model aan een specifiek vraagstuk ten grondslag ligt. Indien de signaalwoorden verwijzen naar verschillende modellen kunnen zij aangeven welk model zij als referentiekader kiezen. Na de keuze van een model kunnen zij aangeven welk fragment uit het model van toepassing is op een bepaald vraagstuk en welke variatie op een model daarbij eventueel speelt.

18. Stap 3: Planning
Na de vaststelling van de samenhang tussen de onbekende grootheid en de data kunnen de leerlingen op twee verschillende wijzen een planning van het oplossingsproces maken:
- door de stappen te benoemen die successievelijk moeten worden uitgevoerd, onder vermelding van de te berekenen tussenresultaten;
- door een vergelijking af te leiden onder weglating van de tussenresultaten.

19. Stap 4: Berekening
Na de vaststelling van een stapsgewijze planning van de oplossing (c.q. het oplossingspad) kunnen leerlingen de uitkomst van een vraagstuk op twee wijzen vaststellen:
- door de uitkomst te berekenen, als voor alle grootheden de bijbehorende waarden bekend zijn,
- door een formule af te leiden, als voor de grootheden alleen parameterwaarden gegeven zijn.

20. Stap 4 (alternatief): Berekening via formule
Na de keuze voor een formule die de samenhang tussen de data en de onbekende aangeeft, kunnen leerlingen de geldigheid van de formule verifiëren en vervolgens de onbekende grootheid berekenen via substitutie van de parameters met de waarden die in een bepaald vraagstuk beschikbaar zijn gesteld.

21. Stap 5: Controle
Tijdens de hantering van deze probleemaanpak kunnen leerlingen onder woorden brengen hoe zij het vraagstuk aangepakt hebben en hoe zij de afzonderlijke stadia doorlopen hebben, waarmee zij aangeven hoe een proces van sturing en bijsturing (monitoring) tot stand is gebracht.

22. Stap 6: Evaluatie
Na afronding van een oplossingsproces kunnen leerlingen aangeven welke kennis zij hebben opgedaan die bruikbaar is in volgende vraagstukken en kunnen zij aangeven welke gevolgen dit heeft voor de voorstelling die zij zich al eerder gemaakt hadden van de bedrijfseconomische problematiek.

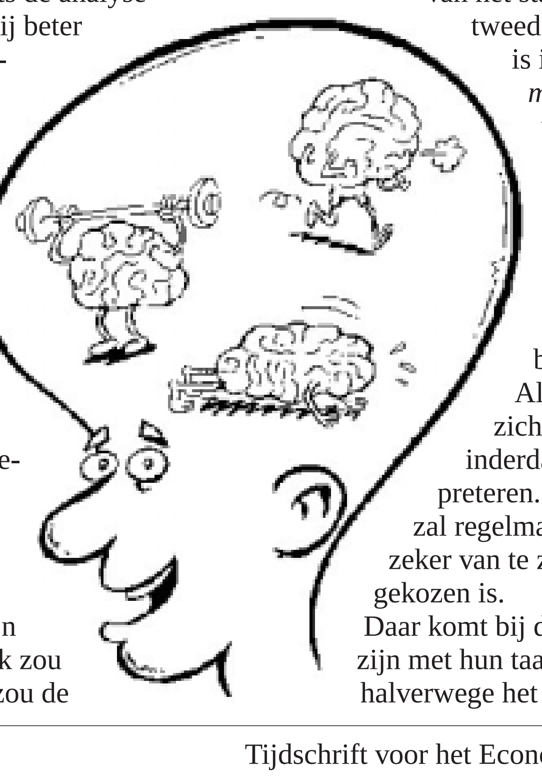
bleemruimte. Gezien de situatie waarin zij geplaatst zijn, ligt het voor de hand om alvast wat vanzelfsprekendheden uit te voeren. Maar die actie bewijst niet dat zij iets snappen van de bedrijfseconomie in het algemeen, noch van de omzet in het bijzonder. Het bewijst alleen dat zij snappen wat zij moeten doen in een vraag met maar één mogelijke wiskundige bewerking.

Docenten hebben op voorhand het oplossingspad in hun hoofd

Het is dus volstrekt begrijpelijk dat leerlingen bij het lezen van een opgave beginnen met het op goed geluk uitvoeren van rekenstappen. Het is echter de taak van de coach om duidelijk te maken dat er ook andere strategieën zijn om aan het werk te gaan. Dat het goed is om op papier of in het hoofd eerst eens de stappen op een rij te zetten die logischerwijze gezet moeten worden. Ook is het de taak van de coach om duidelijk te maken dat dit een nuttige vaardigheid is bij allerlei rekenkundige problemen en dat het daarom een deel is van de algemene ontwikkeling die thuis hoort in het vwo en het havo. Tegelijk is het een eis aan auteurs om vraagstukken aan te bieden die ook vragen om gerichte probleemoplosvaardigheden. Helpstrategieën die erop gericht zijn om veel deelstappen te vragen (zoals de vraag naar de brutowinst) kunnen beter vervangen worden door grotere stappen met *hints* die elders in het boek staan weergegeven. Dat kan dan een schema zijn, of een analysepad dat is afgeleid uit een schema, of een opmerking die leerlingen aan het denken zet. Leerlingen kunnen dan eerst zelf proberen een vraagstuk op te lossen en als zij er niet uit komen, de hints raadplegen. In feite ondersteunen de hints de analyse en de planning. Daarom passen zij beter in het ontwikkelen van probleemoplosvaardigheden dan het stellen van opstapvragen die verklappen hoe de berekening van een centrale grootheid verloopt.

Stap 4 (alternatief):
Berekening via formule
In wezen gaat het bij rekenkundige problemen niet om getallen. Het zou net zo goed kunnen zijn dat de getallen ontbreken en dat er parameters staan. De getallen hoeft een leerling ook niet te onthouden, maar de onderliggende relaties tussen grootheden wel. Het zou goed zijn als er af en toe eens een vraagstuk zou zijn met alleen parameters. Dan zou de berekening zich kunnen beperken tot het omwerken van een stappenplan tot een formule die bruikbaar is in gevallen dat er wel een set met getallen beschikbaar wordt gesteld.
In feite gaat het bij het afleiden van een formule om vereenvoudigingen, zoals substitutie en het herleiden van een onbekende grootheid. Deze vereenvoudigingen liggen in de berekening via de wiskundige methode opgesloten. In ons voorbeeld zijn die al bij stap 3, de planning aan bod gekomen. De berekening bestaat later alleen nog uit het invullen van de juiste getallen op de juiste plaats en vervolgens uit het vaststellen van het resultaat met de rekenmachine.

Als de formule eerder behandeld is, kan de planning via de wiskundige afleiding van de formule vervangen worden door een alternatieve redenering. Een leerling kan een formule uit zijn geheugen opdiepen en toepassen in de gegeven situatie. Het is dan natuurlijk nog wel nodig om na te gaan of de juiste formule tevoorschijn is gehaald. Dat kan plaatsvinden door na te gaan of de vereiste data om de formule toe te passen ook inderdaad beschikbaar zijn en of er geen data ontbreken. Inzicht in de totstandkoming van de formule kan ook helpen om na te gaan of de formule juist is.



Stap 5: Controle
Zodra de uitkomst van een vraagstuk berekend is, volgen nog twee stappen. De eerste is de controle die chronologisch gezien al tijdens de uitvoering van het stappenplan plaats vindt en de tweede is de evaluatie. De controle is in feite een breder proces van *monitoring,* dat wil zeggen van sturen en bijsturen tijdens het proces van probleemoplossen. Monitoring loopt door totdat met een grote mate van zekerheid aangenomen mag worden dat het vereiste resultaat bereikt is.
Al bij stap 1 moeten leerlingen zich afvragen of zij de begrippen inderdaad op de juiste wijze interpreteren. Na de keuze voor een model, zal regelmatig reflectie nodig zijn om er zeker van te zijn dat het goede model gekozen is.
Daar komt bij dat economen nogal slordig zijn met hun taal (3), dus het kan best zijn dat halverwege het oplossingsproces een term

anders bedoeld blijkt te zijn, dan een leerling meende te mogen aannemen vanuit een vorig vraagstuk. Ook kan het gebeuren dat de auteur de betekenis van een term verandert tijdens het vraagstuk zelf of hij gebruikt de term als homoniem (Bijvoorbeeld: ‘restwaarde = restwaarde – sloopkosten’ of ‘aanschafprijs = aanschafprijs + installatiekosten’, waarbij het noch bij de sloopkosten, noch bij de installatiekosten om ‘kosten’ gaat, maar om ‘uitgaven’).

De controle is ook gericht op de volgorde van de stappen en de vraag of de laatste stap inderdaad het antwoord geeft op de gestelde vraag. Voor het vaststellen of alles goed is gegaan, is een groot aantal *controlestrategieën* beschikbaar. Deze kunnen expliciet onderwezen worden door in leerboeken niet alleen de analyse en de bewerking op te nemen,

maar ook de controle. Hoe kun je weten of je iets goed of fout hebt gedaan? Het vermogen om jezelf te controleren en te corrigeren is een deelvaardigheid van probleemoplossen die uitermate cruciaal is voor bedrijfseconomen. Er zijn maar weinig leerboeken die daar expliciet aandacht aan besteden. Eigenlijk zou die vaardigheid apart in het examenprogramma genoemd moeten zijn, zodat deze in alle boeken en ook op de examens apart aan bod zou komen.
Voor de examens betekent het dat leerlingen na afronding van een vraagstuk apart aan moeten geven hoe zij eerder gemaakt werk corrigeren. Vaak zijn toetsen en examens overladen om te voorkomen dat leerlingen tijd over hebben en dan hun werk gaan controleren en goede antwoorden in verwarring veranderen in foute antwoorden. Als een berekening goed is uitgevoerd en daarna foutief is aangepast, dan zou het een vaste regel kunnen zijn dat de leerlingen in elk geval de helft van de beschikbare punten verkrijgt. Dat geeft ruimte om controleren tot een expliciet examenonderdeel te maken en om er in de voorbereiding aandacht aan te besteden.

Stap 6: Evaluatie
De belangrijkste stap van het probleemoplossen blijft meestal achterwege. Dat is de evaluatie, ofwel de vraag ‘Wat heb ik geleerd van dit vraagstuk?’ Wat voor zin heeft het om vraagstukken te maken als je jezelf niet afvraagt wat dat vraagstuk aan je kennis heeft toegevoegd? Sommen maken zonder evalueren betekent dat de doceerstrategie erop gericht is dat leerlingen stilzwijgend en half onbewust de goede conceptuele structuren in hun hoofd opbouwen. Die veronderstelling is niet correct (Vernooij [(4)]). Leerlingen leggen allerlei verbanden tussen grootheden, ook als die verbanden er niet zijn. Ze herdefiniëren grootheden naar believen als ze denken daarmee meer samenhang tot stand te brengen tussen die vloed aan losse termen. Op korte termijn lijkt het alsof het leerproces succes heeft, maar als een ander thema aan bod komt, gaan leerlingen met terugwerkende kracht hun begrippen herdefiniëren, zonder dat zij zich dat bewust zijn.
Het is de taak van de coach om te helpen bij het evalueren van nieuwe kennis. Samenhang zoeken en intergratie tot stand brengen zijn processen die veel essentiëler zijn dan nieuwe kennis toevoegen. De coach kan mentale processen bespreekbaar maken en vaardigheden bijbrengen in het ordenen en het uitbouwen van kennis. Dat begint al door te zeggen dat leerlingen na afloop van een berekening die correct is uitgevoerd, alle getallen uit de berekening weg kunnen halen. Die zijn niet meer van belang. De getallen staan voor grootheden die er achter verscholen gaan. Die grootheden moeten leerlingen onthouden door ze te ordenen in modellen. *‘Mental mapping’* heet dat.
Een vraagstuk dat een staffeltje oplevert, is hetzij een herhaling van iets dat al bekend was, of een uitbreiding van aanwezige kennis. Het is belangrijk om alleen al dat onderscheid te maken en leerlingen te vragen of ze meer weten dan bij aanvang van het vraagstuk. Daar zit de modernisering van het leerproces: *expliciet maken wat tot nu toe impliciet moest gebeuren en wat daardoor vaak achterwege bleef of incorrect verliep*. Eigenlijk zouden auteurs van leerboeken expliciet moeten vragen naar de evaluatie. Dat hoeft niet bij alle vraagstukken te gebeuren, maar zo af en toe zou het toch goed zijn. Temeer daar het ook in het examenprogramma van M&O staat.

De vernieuwing van het programma M&O
In het kader van de vernieuwing van het studiehuis is voor 2005 een herziening van het vakkenpakket aan de orde. Enerzijds is er een logistieke discussie over het aantal uren dat beschikbaar is per vak en het aantal vakken in het profiel en de vrije keuzeruimte. M&O komt in die voorstellen niet in aanmerking om opgenomen te worden in het profiel Economie en Maatschappij. Dit komt mede omdat het aantal vakken in het profiel afneemt en leerlin-

gen kunnen gaan kiezen uit Aardrijkskunde en Geschiedenis. Gezien het feit dat 25% van de instroom in het hoger beroepsonderwijs in een economische studie terecht komt, zou opname van M&O in het voorbereidende profiel echter de meest relevante vooropleiding zijn.

Leerlingen leggen verbanden, ook als die er niet zijn

Wat betreft de vrije keuzeruimte is sprake van uitbreiding naar twee vakken, opheffing van kleine vakken en uitbreiding van het aantal uren per vak. Voor M&O betekent dit goed nieuws. Meer leerlingen zullen M&O kiezen, omdat de keuzes nu weer gelijkwaardig worden, net als bij de introductie van de tweede fase. Toen koos ook 60% van de leerlingen voor M&O. De uitbreiding van het aantal uren houdt ook in dat nieuwe onderdelen die oorspronkelijk alleen in de eerste jaren buiten het centraal examen zouden blijven, nu wel opgenomen kunnen worden in het centraal examen.
Om te wennen aan nieuwe onderwerpen heeft de VECON als belangenbehartiger van de docenten economie voorgesteld deze onderwerpen de eerste jaren alleen op het schoolexamen te vragen, zodat zij later als volwaardige examenonderdelen opgenomen zouden kunnen worden in het centraal examen. Vanuit het ministerie van O&W is later gekozen voor continuering van de uitsluitingen uit de eerste jaren tot langdurige uitsluitingen. Maar dat was nooit de bedoeling van de VECON. Nu de gelegenheid zich voordoet om tot vernieuwing van het programma M&O te komen, wordt het hoog tijd om de nieuwe onderwerpen onverkort in te voeren.
Daarbij past wel de kanttekening dat er een beperkende voorwaarde is, namelijk dat wildgroei buiten het programma om voorkomen moet worden. Dat geldt zowel voor auteurs als voor examenmakers.

Zij moeten zich houden aan de eindtermen die voor het examenprogramma zijn geformuleerd.
Activering van onderwerpen die relevant zijn voor deze tijd, zoals interne organisatie, het functioneren van niet-commerciële organisaties [5] en het ontwikkelen van probleemoplossen als vaardigheid, biedt voldoende houvast om een aantrekkelijk programma neer te zetten. Als leerlingen dan straks twee volwaardige vakken kiezen in hun pakket, zal M&O een goede toekomst tegemoet gaan.

Fons Vernooij is hoofddocent Accounting bij de Vrije Universiteit. Voorheen was hij docent in het voortgezet onderwijs en vakdidacticus bedrijfseconomie aan het Instituut voor de Lerarenopleiding. In 1993 deed hij onderzoek naar probleemoplossen als vaardigheid. Daarna was hij lid van de Vakontwikkelgroep Economie die de nieuwe examenprogramma's voor M&O formuleerde. Ook is hij auteur van Rendement, een lesmethode voor havo en vwo.

Voetnoten

1. Examenprogramma Management en Organisatie, SLO, 1996.
2. Zie voor een overzicht van veel voorkomende modellen: www.bedrijfseconomische-modellen.nl
3. Zie voor een overzicht van veel voorkomende homoniemen, synoniemen en misconcepties: www.bedrijfseconomische-begrippen.nl
4. Vernooij, A. T. J. (1993). *Het leren oplossen van bedrijfseconomische problemen. Didactisch onderzoek naar kostprijs- en nettowinstvraagstukken in het voortgezet onderwijs.* Rotterdam: dissertatie.
5. Voor een nadere discussie over het belang van de niet-commerciële organisaties, zie:
   - Vernooij, (2003). M&O terug in het oorspronkelijke kader. Baten en lasten van de vereniging, Tijdschrift Economisch Onderwijs, nr 1.
   - Temmerman en Vernooij, (2003). Baten en lasten van de overheid, Tijdschrift Economisch Onderwijs, nr 2.