

Probleemoplossen als vaardigheid

Herschreven op 6 april 2018. Zie de toelichting onder dit artikel.

Zelfstandig leren vereist van leerlingen dat zij de vaardigheid ontwikkelen om zelf oplossingen te zoeken voor problemen waar zij tegen aan lopen. Zij kunnen voortdurend aan de docent vragen wat zij moeten doen, maar het is beter als zij zelf systematisch te werk leren gaan. De centrale vraagstelling zou niet langer moeten zijn: ‘Wat komt er uit deze opgave?’, maar ‘Hoe pak ik de opgave aan?’

Voor het economisch onderwijs heeft dit vergaande gevolgen, met name als het gaat om calculatorische vraagstukken. Het gaat er niet langer om dat docenten de uitkomst voorrekenen, maar dat zij denkstappen aanreiken waarmee een leerling zelfstandig het oplossingspad kan ontwerpen. Van oudsher is het lesmateriaal sterk voorgestructureerd en vervult de docent de rol van ‘instructeur’. In een moderne aanpak van het onderwijs verandert dit in de rol van ‘coach’.

Door Fons Vernooij

De kern van een vraagstuk

Het oplossen van problemen kan betrekking hebben op verschillende soorten problemen. Bij bedrijfseconomie gaat om berekeningen die de leerlingen op grond van een korte probleembeschrijving moeten uitvoeren. Aan die berekeningen kunnen formules ten grondslag liggen of zij kunnen bestaan uit een reeks gegevens die op een of andere manier gecombineerd moeten worden tot een rekenkundige bewerking.

Een formule is een functievoorschrift waarbij de juiste getallen in de juiste parameters gestopt moeten worden. Bij rekenkundige bewerkingen is er wel een samenhangend geheel maar het functievoorschrift zit ergens in de opgave verstopt. De kern van een vraagstuk als probleem, zit er in dat leerlingen een voorschrift moeten achterhalen voordat zij een berekening stap voor stap kunnen uitvoeren. Om ze op weg te helpen geeft de auteur van een leerboek vaak een voorbeeld.

Waar is een voorbeeld een voorbeeld van?

Het voorbeeld, dat een auteur presenteert, is eigenlijk een rekenkundige uitwerking van een model dat verscholen zit in de opgave. Een voorbeeld is immers een specifieke toepassing van iets dat algemener van aard is. In feite moeten leerlingen alle getallen weghalen uit het voorbeeld en bekijken wat dan overblijft. Dit geraamte levert een algoritme op dat in de aansluitende opgaven in allerlei variaties terugkomt. Een algoritme geeft aan welke rekenkundige stappen uitgevoerd moeten worden om met zekerheid tot de juiste uitkomst te komen.

Het aardige van een dergelijk geraamte is dat de berekeningen zijn uit te breiden of om te keren. Een auteur van een boek kan bijvoorbeeld eerst de aanschafprijs, de restwaarde en de levensduur van een machine geven om vervolgens te vragen de afschrijvingskosten per maand uit te rekenen. Vervolgens kan deze fundamentele opgave uitgebreid worden (door de uitgaven voor installatie of sloop toe te voegen) of door de redenering om te keren. Hoe hoog was bijvoorbeeld de aanschafprijs als de afschrijvingskosten, de restwaarde en de levensduur van een machine bekend zijn? Of hoe groot is de restwaarde als alle andere grootheden bekend zijn?

Steeds kunnen de getallen variëren, maar het geraamte uit het voorbeeld blijft bestaan als model dat in uiteenlopende vormen terugkeert in de daarop volgende opgaven. Die systematiek geldt niet alleen voor de afschrijvingsproblematiek maar ook voor de berekening van de gewenste verkoopprijs, de kostprijs of de nettowinst, of enig ander thema uit de bedrijfseconomie.

De kern van een probleem

In wezen ligt aan bijna elk rekenkundig probleem binnen de bedrijfseconomie een *conceptueel model* ten grondslag. Dat wil zeggen dat er een reeks *begrippen* is die met elkaar een samenhangend geheel vormen. Elk begrip is een grootheid met een naam, een waarde en een eenheid die vorm geven aan een *economische notie* (dus aan iets dat een duidelijke betekenis heeft binnen de bedrijfseconomie). Het handige is daarbij dat een model te vereenvoudigen is door in een opgave slechts een fragment uit het model te verwerken. Ook is mogelijk om een grootheid de waarde 0 toe te kennen, waardoor die grootheid buiten beschouwing blijft.

Een auteur van lesmateriaal kan via een reeks van opgaven samenhangende fragmenten van een model aan de orde stellen en er zo naar streven dat leerlingen in hun hoofd de fragmenten op correcte wijze aaneen rijgen tot een volwaardig model. Ook het toevoegen van vragen of opdrachten waarin variabelen voorkomen die eerst de waarde 0 hadden, biedt de mogelijkheid om leerlingen geleidelijk het zicht bij te brengen op het totale model. Bijvoorbeeld eerst een verkoopprijs berekenen zonder BTW (dus waarde BTW-opslag = 0) en later een prijs met BTW.

De basis voor een systematische probleemaanpak ligt in de notie dat al die rekenkundige sommetjes uiteindelijk tot doel hebben dat leerlingen in hun hoofd een integratie tot stand brengen tussen de begrippen die ze tegenkomen. Herhalen van berekeningen heeft niet tot doel om cijfers te produceren en die te onthouden, want in nieuwe vraagstukken of in toetsen komen nooit dezelfde getallen voor. De bedoeling is steeds om samenhang te zien tussen concepten en om die samenhang te benutten om nieuwe problemen aan te pakken.

Hoe beter een leerling erin slaagt om vanuit de fragmenten goede conceptuele modellen op te bouwen, hoe beter een leerling in staat is om steeds complexere problemen op te lossen.

Eigenlijk zou elk vraagstuk moeten eindigen met *reflectie op het oplossingsproces*. Wat moet je van dit vraagstuk onthouden? Schrap de getallen eens weg uit je uitwerking en kijk wat je dan overhoudt. Plaats de staffel eens naast andere staffeltjes die je gemaakt hebt in andere sommen en vergelijk die met elkaar. Waar zitten overeenkomsten en waar zitten verschillen? Kun je de staffeltjes ineen schuiven tot grotere gehelen? Kortom, hoe integreer je de kennis die je in deze opgave hebt opgedaan met de kennis die je in eerdere opgaven al verworven hebt?

Een systematische probleemaanpak

Probleem oplossen als vaardigheid vereist een goede systematiek om vraagstukken aan te pakken. Die systematiek geeft aan welke stappen op een of andere manier doorlopen moeten worden om tot een succesvol resultaat te komen. Het zijn echter geen chronologische stappen, maar *logische* stappen. Dat wil zeggen dat het in de praktijk niet zo is dat iemand stap 1 van het proces helemaal afrondt voordat hij of zij aan stap 2 begint.

Meestal worden stappen slechts half doorlopen en pas als iemand de draad kwijt is, springt hij terug naar eerdere stappen om de draad weer ergens op te pakken. Chronologisch is er dus een wisselwerking die zoekend en tastend moet leiden naar een eindresultaat waar uiteindelijk toch alle logische stappen afgerond zijn.

Bij het oplossen van calculatorische problemen gaat het in wezen om zes logische stappen die leerlingen moeten uitvoeren:

1. *Oriëntatie op het probleem*: wat wordt er eigenlijk gevraagd?
2. *Analyse van het probleem*: hoe ligt het verband tussen de onbekende en de gegevens?
3. *Planning van de uitwerking*: welke rekenstappen moet ik in welke volgorde zetten?
4. *Berekening van de uitkomst*: welke getallen vul ik in de diverse rekenstappen in?
5. *Controle van het proces*: heb ik niks vergeten of verkeerd gedaan?
6. *Evaluatie van het resultaat*: wat heb ik geleerd? Hoe past dit in eerder verworven kennis?

Deze systematiek van probleemoplossen is destijds bij de formulering van het examenprogramma voor M&O vastgelegd in de examenstof bij de 'Vaardigheden en werkwijzen' (1). Deze eindtermen zijn in [bijlage 1](#) bij dit artikel geplaatst. De oorspronkelijke tekst uit het examenprogramma is hier en daar omgezet naar leesbaar Nederlands en voorzien van cursieve kopjes.

In het onderstaande volgt een toelichting op elke stap van het probleemoplossen. Terloops staan kanttekeningen over de vormgeving van het lesmateriaal. De vaardigheid om problemen op te lossen komt immers beter uit de verf als de vraagstukken die de leerlingen krijgen voorgeschoteld, ook zo zijn geschreven dat de stappen in het oplosproces duidelijker tot hun recht komen.

De inspiratie voor de ontwikkeling van een visie op probleemoplossen komt van een verzuchting die ik als docent regelmatig hoorde van leerlingen: 'Als u het uitlegt, snap ik het helemaal. Maar als ik zelf zo'n som moet maken, weet ik niet waar ik moet beginnen.' De kunst van het docentschap is dus niet om de berekening van de uitkomst (stap 4) voor te doen, maar om de drie voorafgaande stappen duidelijk te maken, zodat leerlingen zelf kunnen bedenken hoe de berekening moet plaatsvinden. Oh ja, ook de twee laatste stappen zouden aan bod moeten komen in de bespreking van de vraagstukken.

Een voorbeeldopgave

De bespreking van de stappen vindt plaats aan de hand van een voorbeeld over de break-evenanalyse. Even goed had een ander thema, zoals de berekening van de gewenste

verkoopprijs of de bepaling van de boekwaarde van een machine, gekozen kunnen worden. Het voorbeeld is een voorbeeld van de manier waarop de systematiek van probleemoplossen is toe te passen. Tegelijk is het een voorbeeld van de manier waarop volgens de bedrijfseconomische traditie vraagstukken zijn opgebouwd met *help- en anti-helpstrategieën* om de aansturing van de leerlingen te beheersen.

Een helpstrategie is een poging van de auteur om bijna ongemerkt het probleem voor de leerlingen te vereenvoudigen, terwijl een anti-helpstrategie tot doel heeft om een vraagstuk lastiger te maken. Een traditionele anti-helpstrategie, dat in bijna elk bedrijfseconomisch vraagstuk voorkomt, is het ontbreken van een functievoorschrift, dus het verband tussen de onbekende en de data die beschikbaar zijn. Leerlingen moeten dat zelf toevoegen. Anders zou het vraagstuk te makkelijk worden. Maar om leerlingen niet te laten zwemmen, dient als helpstrategie het getallenvoorbeeld waaruit de leerlingen een algoritme kunnen halen.

Ook het vermijden van overbodige gegevens is een helpstrategie, evenals het ordenen van de gegevens in de volgorde van gebruik. Om het toch weer moeilijk te maken voor leerlingen is een beproefde anti-helpstrategie om problemen samen te voegen tot een cluster. Hierover stelt de auteur een aantal vragen die de leerlingen dwingt te kiezen welke gegevens voor welke vraag nodig zijn. Zoals in het latere voorbeeld zal blijken, is de nummering van de vragen op zich weer een help- of anti-helpstrategie.



Probleemoplossen in het studiehuis

Leerlingen die hun huiswerk maken of op school zelfstandig werken, kunnen niet tussendoor vragen stellen aan de auteur over de stappen die zij in een berekening moeten zetten. De meest traditionele helpstrategie om daaraan tegemoet te komen, is om deelvragen te stellen. De auteur komt de leerlingen te hulp door eerst een vraag te stellen over een of meer tussenresultaten voordat hij een vraag stelt over het eindresultaat. Daarmee geeft de auteur de volgorde prijs van de stappen die nodig zijn om het probleem aan te pakken.

Dat ondermijnt de doelstelling om te leren zelfstandig problemen op te lossen. Maar ook daarop is weer een anti-helpstrategie bedacht zoals in onderstaand voorbeeld zal blijken. Het schrijven van vraagstukken bestaat dan ook uit het afwegen van helpstrategieën en anti-helpstrategieën. In onderstaand voorbeeld komen de meeste van die strategieën tot uitdrukking.

‘Een handelaar verwacht in de maand mei 2000 eenheden product te verkopen voor de prijs van € 10,00 per stuk. De inkoopprijs van de producten is € 6,00 en de variabele kosten zijn € 1,50 per stuk. De constante kosten bedragen € 4.000,00 per maand.

Gevraagd:

- 1. Hoe groot is de brutowinst in mei?*
- 2. Hoe groot is de nettowinst in mei?*
- 3. Welke prijs moet hij vragen als hij € 3.000,00 wil verdienen in de maand mei, ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten en de afzet niet veranderen?*
- 4. Hoeveel stuks zou hij moeten verkopen als hij € 3.000,00 wil verdienen bij een prijs van € 10,00 per stuk ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten niet veranderen.’*

De logische stappen in het oplossen van een probleem

Stap 1: Oriëntatie

De eerste stap is de oriëntatie op het probleem. Leerlingen moeten zich afvragen wat er precies staat en wat er precies van hen verwacht wordt. Enerzijds gaat het om de bedrijfseconomische begrippen die er staan en die in de voorafgaande tekst behandeld moeten zijn. Termen als brutowinst, nettowinst, verdienen, variabele kosten, constante kosten, afzet en prijs moeten bekend zijn om het vraagstuk aan te kunnen pakken.

Anderzijds gaat het om de structuur van het vraagstuk en om het samenspel van helpstrategieën en anti-helpstrategieën. Vraag 1 is een opstap naar vraag 2, maar vraag 2 is geen opstap naar vraag 3 en 4. Het vragen naar de brutowinst als een tussenstap in de berekening van de nettowinst is een helpstrategie om de opgave te vereenvoudigen, maar anderzijds is de wijze van nummeren een anti-helpstrategie van de auteur om het vraagstuk moeilijker te maken. In feite zijn twee soorten problemen samengevoegd. Dit laatste is op zich weer een anti-helpstrategie. Leerlingen moeten het vraagstuk als volgt lezen.

‘Een handelaar heeft een probleem, want hij wil een schatting maken van zijn winst. Daarvoor heeft hij de volgende gegevens verzameld. De verwachte afzet voor de maand mei is 2000 eenheden product te verkopen voor € 10,00 per stuk. De inkoopwaarde van de producten is € 6,00 en de variabele kosten zijn € 1,50 per stuk. De constante kosten bedragen € 4.000,00 per maand.

- 1. a. Hoe groot is de brutowinst in mei?*
- b. Hoe groot is de nettowinst in mei?*

De handelaar heeft nog een probleem, want hij wil ten minste € 3.000,00 nettowinst maken in mei. Dat kan door de prijs te variëren of de afzet.

- 2. a. Hoe groot is de gewenste prijs die moet hij vragen om deze winst te behalen, ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten en de afzet niet veranderen?*
- b. Hoeveel stuks zou hij moeten verkopen bij een prijs van € 10,00 per stuk om deze winst te behalen, ervan uitgaande dat de gegevens over de kosten niet veranderen?’*



Stap 2: Analyse

De tweede stap in het oplossingsproces is het vinden van een pad dat leidt van de beschikbare gegevens naar de onbekende grootheid. Dit is voor ondernemers een onnatuurlijke probleemsituatie. Zij starten met een probleem en moeten eerst zelf bedenken welke gegevens nodig zijn om het probleem op te lossen. Daarom starten zij altijd met een onbekende grootheid en moeten eerst beredeneren welke gegevens zij in de oplossing moeten betrekken. Zij leggen dus al verband tussen de onbekende grootheid en de vereiste data *voordat zij de bijbehorende getallen verzamelen*.

Leerlingen krijgen via hun leerboek eerst een rijtje data en pas tot slot volgt een vraag waaruit het probleem blijkt. Dat komt omdat leerlingen werken met leerboeken. Auteurs kunnen geen gegevens achterhouden tot leerlingen erom vragen. Daarom lopen zij steeds op de probleemsituatie vooruit en geven alle data prijs die nodig zijn voor de oplossing van het probleem. In de herformulering van het vraagstuk is hieraan in zekere mate al tegemoet gekomen, maar fundamenteel blijft de onnatuurlijke situatie toch gewoon voortbestaan.

Wat dat betreft zou een computerprogramma op totaal andere wijze vraagstukken kunnen aanbieden. Een computer kan gegevens vasthouden tot leerlingen erom vragen. Een vraagstuk begint dan niet met een opsomming van gegevens met tot slot de vraag om iets uit te rekenen, maar op het scherm komt eerst het probleem. Leerlingen zouden via een interactieproces moeten aangeven welke data zij denken nodig te hebben om het vraagstuk aan te pakken. Pas als de leerlingen de goede data noemen, geeft de computer de getallen die erbij horen. Zodoende zien zij eerst de samenhang tussen de onbekende grootheid en de data, voordat zij kunnen beginnen met rekenen.

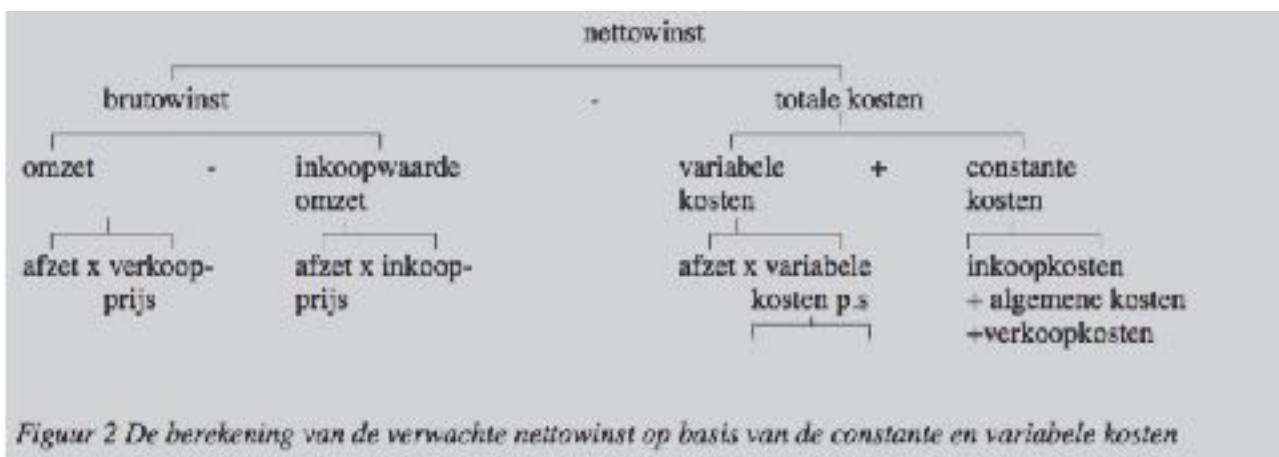
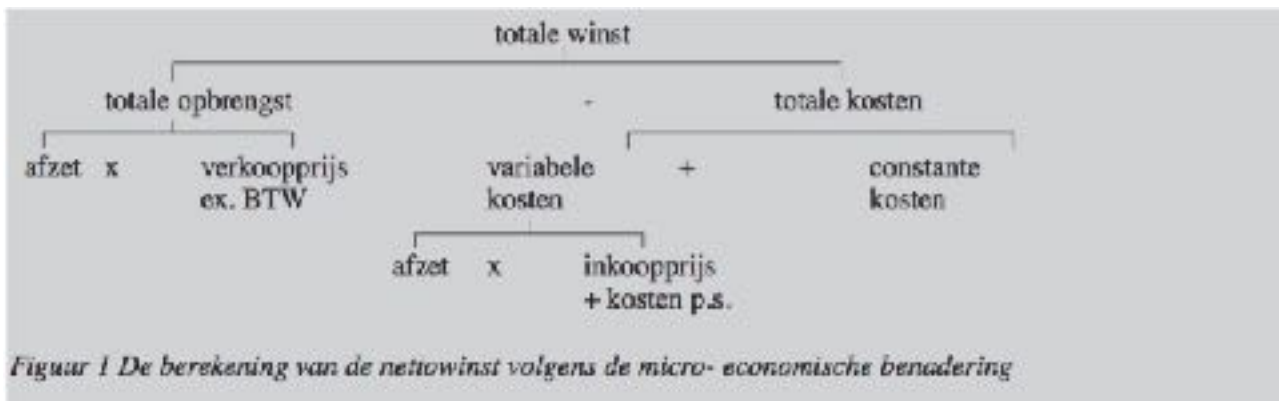
In het gegeven voorbeeld zijn feitelijk drie onbekende grootheden: de verwachte nettowinst, de gewenste prijs en de gewenste afzet. De drie paden die leiden van de data naar deze drie onbekende grootheden staan niet in het vraagstuk beschreven. Dat had bij de gewenste afzet bijvoorbeeld gekund door de formule voor de afzet te geven. De leerlingen moeten dus op een of andere manier steeds zelf het pad verzinnen.

Docenten hebben de oplossingspaden op voorhand al in hun hoofd en anders staat het wel in een antwoordenboek dat zij raadplegen tijdens de les of bij het voorbereiden. Leerlingen moeten het pad herleiden vanuit een of ander conceptueel model dat ze eerder verworven hebben. Zij

moeten aan de hand van termen die in gebruik zijn, onderkennen om welk model het gaat. Zij moeten dus een model kiezen waarin termen voorkomen zoals variabele kosten, constante kosten, brutowinst en nettowinst.

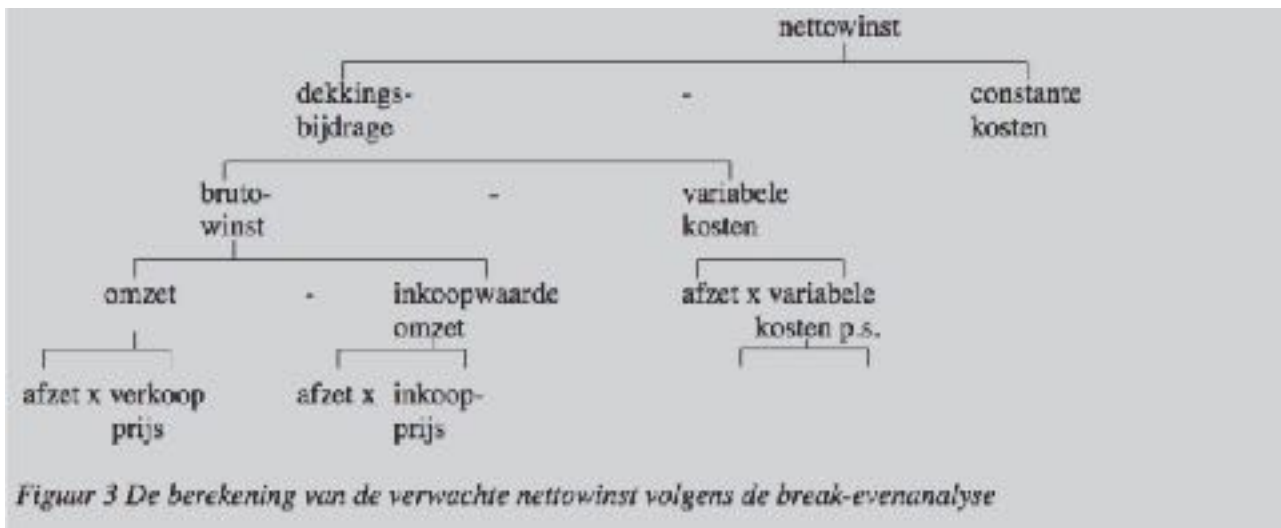
Voor brutowinst en nettowinst zijn verschillende modellen beschikbaar (2). Het meest voor de hand liggende model is de methode van de brutowinstopslag of de nettowinstopslag. Die modellen zijn echter gebaseerd op een functionele kostenindeling (inkoopkosten, algemene kosten en verkoopkosten) en daarover is niets bekend. Dus die modellen vallen af.

Vanwege de variabele en constante kosten blijven twee modellen over: een micro-economisch model (zie figuur 1) en een bedrijfseconomisch model (zie figuur 2). Beide modellen zijn in principe veel uitgebreider, omdat de variabele kosten en de constante kosten zijn uit te splitsen naar de functionele kosten die eraan ten grondslag liggen.



Bij de micro-economie valt de inkoopprijs onder de variabele kosten. Daardoor is het niet mogelijk een brutowinst te berekenen en dus valt de keuze op het bedrijfseconomische model. Ditzelfde model is ook voor het tweede probleem te gebruiken, zij het dat een kleine wijziging in de ordening van het model tot een meer overzichtelijke probleemsituatie leidt.

Daardoor ontstaat figuur 3. Ook dit model is uitgebreider, maar voor probleem 2 is dit fragment voldoende. Het is een volledig *Probleem Analyse Diagram* (PAD) en geeft aan langs welke rekenstappen je van de gegevens bij de onbekende grootte kunt komen.



Stap 3: Planning

Voor de verdere uitwerking van de twee problemen is het mogelijk om aan de hand van het gekozen PAD (probleem-analyse diagram dus) tot een aantal algoritmes te komen. Een algoritme geeft, zoals eerder opgemerkt, aan welke rekenkundige stappen uitgevoerd moeten worden om met zekerheid tot de juiste uitkomst te komen. Dat algoritme is geen probleem meer, zodra het PAD bekend is. In feite is in stap 2 het probleem al opgelost. Als je weet hoe je van de beschikbare gegevens bij de onbekende grootte moet komen, heb je geen probleem. Hooguit is er nog wat redeneerwerk en wat cijferwerk nodig, maar een probleem is er alleen als je niet weet hoe je verder moet gaan om de situatie te beheersen.

Planning eerste probleem

Bij het eerste probleem is het pad simpel. De nettowinst is de centrale grootte in het model en die is tevens de onbekende. De analyse loopt van boven naar beneden, maar de planning van het oplossingspad loopt van beneden naar boven. Eventueel zijn wat herschikkingen mogelijk, maar het oplossingspad leidt bij juist gebruik onherroepelijk tot de juiste uitkomst.

Uit figuur 2 is af te lezen dat het oplossingspad als volgt luidt:

- omzet = afzet x verkoopprijs
- inkoopwaarde omzet = afzet x inkoopprijs
- brutowinst = omzet – inkoopwaarde omzet
- variabele kosten = variabele kosten per stuk x afzet
- totale kosten = variabele kosten + constante kosten
- nettowinst = brutowinst – totale kosten.

De vraag naar de brutowinst, is dus inderdaad een helpstrategie, omdat het algoritme gesplitst wordt in twee gelijkwaardige delen. De leerlingen hoeven niet meer zelf het hele traject te bedenken en het probleem is dus gedecimeerd als probleem.



Het bovenstaande algoritme geeft aan hoe de *rekenkundige bewerking* van de oplossing in elkaar steekt. Dat wil zeggen dat alle tussenresultaten daadwerkelijk berekend worden. Naast de rekenkundige aanpak is er echter ook een *wiskundige bewerking* mogelijk. Daarbij worden de tussenresultaten zoveel mogelijk overgeslagen. Voor ondernemers is dit niet aantrekkelijk, omdat zij ook een beeld willen hebben van alle tussenresultaten. Maar een wiskundige zou de volgende aanpak prefereren.

Uit het model is een tweetal formules af te leiden, waarin de onbekende grootte direct gerelateerd wordt aan alle beschikbare data:

1.a brutowinst = afzet x (verkoopprijs – inkoopprijs).

1.b nettowinst = brutowinst – afzet x variabele kosten per stuk – constante kosten.

Planning tweede probleem: deelvraag 2.a.

Bij het tweede probleem is het wat lastiger om het oplossingspad te formuleren. De nettowinst blijft de *centrale grootte* in de berekening. Maar zij is nu niet langer de onbekende, maar heeft een gegeven waarde. De handelaar wil in elk geval € 3.000,00 nettowinst maken en wil weten welke prijs hij moet vragen. Daarom moet er eerst een herleiding plaatsvinden waarbij niet de centrale grootte maar één van de oorspronkelijke data de grote onbekende is. Bijna ongemerkt krijgen enkele grootheden de toevoeging ‘gewenst’ erbij. En de term ‘verdienen’ wordt ongemerkt als synoniem gebruikt voor ‘nettowinst’.

Dit betekent dat een aantal rekenkundige bewerkingen omslaat in hun inverse. Aftrekken wordt optellen en vermenigvuldigen wordt delen. Daarom moet de leerling eerst het *analysepad* vaststellen, voordat het *oplossingspad* beredeneerd kan worden. Dit analysepad loopt van de onbekende grootte (in dit geval de gewenste verkoopprijs) naar de beschikbare data, waaronder de gewenste nettowinst. (NB de cursieve grootheden zijn onbekend, de andere grootheden zijn gegeven.)

Het analysepad van vraag 2.a luidt als volgt.

- *gewenste verkoopprijs* = omzet / afzet
- *omzet* = *inkoopwaarde omzet* + brutowinst
- *inkoopwaarde omzet* = afzet x inkoopprijs
- *brutowinst* = *variabele kosten* + *dekkingsbijdrage*
- *variabele kosten* = afzet x variabele kosten per stuk
- *dekkingsbijdrage* = gewenste nettowinst + constante kosten.

Na de vaststelling van het analysepad is de samenhang tussen de onbekende grootte en de data bekend. Het probleem is opgelost. De uitkomst is alleen nog niet bekend. Om die te vinden kunnen de leerlingen ook nu weer op twee verschillende wijzen een planning van het oplossingsproces maken:

- door toepassing van de rekenkundige methode, dus de stappen te benoemen die successievelijk moeten worden uitgevoerd, onder vermelding van de te berekenen tussenresultaten;
- door toepassing van de wiskundige methode, dus een vergelijking af te leiden onder weglating van de tussenresultaten.

De rekenkundige methode leidt tot een oplossingspad dat omgekeerd verloopt aan het analysepad. Immers de analyse begint bij de onbekende grootte, terwijl de oplossing begint bij de combinatie van bekende data. In deze vertaalslag schuilt het dilemma van de leerling die verzucht: 'Als u het uitlegt, snap ik het helemaal, maar als ik zelf zo'n vraagstuk moet maken weet ik niet waar ik moet beginnen.' Die leerling heeft niet de vaardigheid ontwikkeld om te ontdekken hoe het analysepad eruit ziet en is daardoor ook niet in staat om dit pad in omgekeerde wijze te volgen en daarmee het oplossingspad te formuleren.

Het oplossingspad van vraag 2.a langs de rekenkundige weg luidt dus (ook nu weer staan de onbekende grootheden cursief):

- *dekkingsbijdrage* = gewenste nettowinst + constante kosten.
- *variabele kosten* = afzet x variabele kosten per stuk
- *brutowinst* = variabele kosten + dekkingsbijdrage
- *inkoopwaarde omzet* = afzet x inkoopprijs
- *omzet* = inkoopwaarde omzet + brutowinst
- *gewenste verkoopprijs* = omzet / afzet.

De wiskundige methode leidt ook in dit geval tot een *formule* die vanuit figuur 3 in twee stappen via substitutie tot stand kan komen. Deze exercitie voorkomt een hoop rekenwerk, maar vereist wel enige zorgvuldigheid op conceptueel niveau.

- (1) gewenste verkoopprijs x afzet = gewenste nettowinst + constante kosten + afzet x variabele kosten per stuk + afzet x inkoopprijs, dus:
- (2) gewenste verkoopprijs = ([gewenste nettowinst + constante kosten] / afzet) + variabele kosten per stuk + inkoopprijs.

Concluderend is te zeggen, dat bij stap 3 (het plannen van de oplossing) het erom gaat dat de leerlingen in gedachten het oplossingspad traceren dat nodig is om vanuit de brij aan data de juiste uitkomst te vinden.

Natuurlijk kunnen leerlingen dit niet vanzelf. Chronologisch zullen zij proberen fragmentjes te identificeren en die alvast uit te rekenen om zo bij brokjes en beetjes de uitkomst te vinden. Echter, als het doel van het onderwijs is om leerlingen vaardig te maken in het oplossen van problemen, ontkomt een coach er niet aan om aanwijzingen te geven hoe het oplossingspad stap voor stap is te beredeneren. Hoe het oplossingspad dus in feite ontstaat als omkering van het analysepad.

De essentie van didactiek is om een reeks stappen op te splitsen in deeltjes die overzichtelijk zijn. Daarbij gaat het niet zozeer om het splitsen van een algoritme in afzonderlijke stappen, maar vooral om het splitsen van het oplossingsproces in fasen. Bovendien is het mogelijk om te beginnen met kleinere problemen die uit minder rekenstappen bestaan dan in dit vraagstuk zijn weergegeven.



Planning tweede probleem: deelvraag 2.b.

Overigens is er naast *substitutie* nog een tweede manier om de formule af te leiden. Die methode is bij voorbeeld goed bruikbaar voor vraag 2.b. Het is ook mogelijk om een formule te vinden door het PAD *plat te slaan*. De nettowinst komt dan als grootte voorop te staan. De berekening, met ditmaal de afzet als enige onbekende grootte, kan uitgewerkt worden volgens de regels om vergelijkingen met één onbekende op te lossen.

(1) gewenste nettowinst = $afzet \times verkoopprijs - afzet \times inkoopprijs - afzet \times variabele\ kosten\ per\ stuk - constante\ kosten$.

(2) gewenste nettowinst + constante kosten = $afzet \times (verkoopprijs - inkoopprijs - variabele\ kosten\ per\ stuk)$.

(3) (gewenste) afzet = $(gewenste\ nettowinst + constante\ kosten) / (verkoopprijs - inkoopprijs - variabele\ kosten\ per\ stuk)$

Stap 4: Berekening

Het gebruik van getallen bij de vaststelling van de uitkomst, begint logisch gezien pas in stap 4 van het oplossingsproces. Docenten die het oplossingspad al in hun hoofd hebben zitten, hebben sterk de neiging om de uitleg van een vraagstuk te beginnen met de eerste regel van het oplossingspad en daar direct de grootheden van de bijbehorende waarden te voorzien. Dat lijkt heel simpel en eenvoudig, maar dat is precies de reden waarom leerlingen niet weten waar zij moeten beginnen als ze zelf zo'n vraagstuk moeten maken.

Dat geldt dan met name voor de *omkeringsvraagstukken*, dus de vraagstukken waar de centrale grootte niet als onbekende grootte wordt opgevoerd, maar als bekende. In bovenstaand voorbeeld, dus bij vraag 2.a en 2.b. Minder problematisch is het bij *fundamentele vraagstukken*, dus vraagstukken waar de analyse in het model van boven naar beneden loopt, zoals vraag 1.b.

Er zijn dan niet zoveel drempels om over te struikelen. Pas als de bewerkingen omgedraaid moeten worden ontstaat de verwarring. Dus als optellen verandert in aftrekken en als vermenigvuldigen verandert in delen.

Leerlingen die op goed geluk gaan rekenen onder het motto “Ik combineer alvast wat getallen en dan kijk ik naar de vragen en vaak staat er dan al wat goeds op papier”, die zijn vrij succesvol met deze methode zolang het om fundamentele vraagstukken gaat. Vooral als de auteur de gegevens opsomt in de volgorde waarin ze nodig zijn voor de berekening. Dan gaat het meer om ‘gericht gokken’, dan om ‘probleem oplossen’. Sommige leerlingen zijn heel handig in het *gericht gokken* en halen daar behoorlijke cijfers mee. Maar ja, gericht gokken is geen doel van het onderwijs terwijl probleemoplossen als vaardigheid dat wel is.

In elk geval kan een leerling, los van gericht gokken, de uitkomst van een berekening alleen correct hebben, als op een of andere manier de juiste stappen in de juiste volgorde zijn komen te staan. Als een leerling in de tekst van de opgave leest: ‘De verwachte afzet voor de maand mei is 2000 eenheden product, te verkopen voor € 10,00 per stuk.’ dan is het niet moeilijk om vervolgens op goed geluk de afzet met de verkoopprijs te vermenigvuldigen en de omzet te vinden.

Wat kunnen leerlingen anders doen? Zij kunnen die twee grootheden niet bij elkaar optellen, noch van elkaar aftrekken, noch delen, machtsverheffen of worteltrekken. Met die bewerking verkleinen de leerlingen wel de *probleemruimte*. Gezien de situatie waarin zij geplaatst zijn, ligt het voor de hand om alvast wat vanzelfsprekendheden uit te voeren. Maar die actie bewijst niet dat zij iets snappen van de bedrijfseconomie in het algemeen, noch van de omzet in het bijzonder. Het bewijst alleen dat zij snappen wat zij moeten doen in een vraag met maar één mogelijke wiskundige bewerking.

Het is dus volstrekt begrijpelijk dat leerlingen bij het lezen van een opgave beginnen met het op goed geluk uitvoeren van rekenstappen. Het is echter de taak van de coach om duidelijk te maken dat er ook andere strategieën zijn om aan het werk te gaan. Dat het goed is om op papier of in het hoofd eerst eens de stappen op een rij te zetten die logischerwijze gezet moeten worden. Ook is het de taak van de coach om duidelijk te maken dat dit een nuttige vaardigheid is bij allerlei rekenkundige problemen en dat het daarom een deel is van de algemene ontwikkeling die thuis hoort in het onderwijs.

Tegelijk is het een eis aan auteurs om vraagstukken aan te bieden die ook vragen om gerichte probleemoplosvaardigheden. Helpstrategieën die erop gericht zijn om veel deelstappen te vragen (zoals de vraag naar de brutowinst) kunnen beter vervangen worden door grotere stappen met *hints* die elders in het boek staan weergegeven. Dat kan dan een schema zijn, of een analysepad dat is afgeleid uit een schema, of een opmerking die leerlingen aan het denken zet. Leerlingen kunnen dan eerst zelf proberen een vraagstuk op te lossen en als zij er niet uit komen, de hints raadplegen.

In feite moeten de hints de analyse en de planning ondersteunen, zonder deze overbodig te maken. Daarom passen zij beter in het ontwikkelen van probleemoplosvaardigheden dan het stellen van opstapvragen die verklappen hoe de berekening van een grootheid verloopt.

Stap 4 (alternatief): Berekening via een formule

In wezen gaat het bij rekenkundige problemen niet om getallen. Het zou net zo goed kunnen zijn dat in een opgave de getallen ontbreken en dat er parameters staan. De getallen hoeft een leerling ook niet te onthouden, maar de onderliggende relaties tussen grootheden wel. Het zou goed zijn als er af en toe eens een vraagstuk zou zijn met alleen parameters. Dan zou de berekening zich kunnen beperken tot het omwerken van een stappenplan tot een formule die bruikbaar is in gevallen dat er wel een set met getallen beschikbaar wordt gesteld.

In feite gaat het bij het afleiden van een formule om vereenvoudigingen, zoals substitutie en het herleiden van een onbekende grootheid. Deze vereenvoudigingen liggen in de berekening via de wiskundige methode opgesloten. In ons voorbeeld zijn die al bij stap 3, de planning aan bod gekomen. De berekening bestaat later alleen nog uit het invullen van de juiste getallen op de juiste plaats en vervolgens uit het vaststellen van het resultaat met de rekenmachine.

Als de formule eerder behandeld is, kan de planning via de wiskundige afleiding van de formule vervangen worden door een alternatieve redenering. Een leerling kan een formule uit zijn geheugen opdiepen en toepassen in de gegeven situatie, zoals bij de break-even analyse vaak het geval is. Het is dan natuurlijk nog wel nodig om na te gaan of de juiste formule tevoorschijn is gehaald. Dit kan plaatsvinden door na te gaan of de vereiste data om de formule toe te passen ook inderdaad beschikbaar zijn en of er geen data ontbreken of overblijven. Inzicht in de totstandkoming van de formule kan ook helpen om na te gaan of de formule juist is.

Stap 5: Controle

Zodra de uitkomst van een vraagstuk berekend is, volgen nog twee stappen, ook al slaan leerlingen dan vaak het boek dicht. De eerste is de controle die chronologisch gezien al tijdens de uitvoering van het stappenplan plaats vindt en de tweede is de evaluatie. De controle is in feite een breder proces van *monitoring*, dat wil zeggen van sturen en bijsturen tijdens het proces van probleemoplossen. Monitoring loopt door totdat met een grote mate van zekerheid aangenomen mag worden dat het vereiste resultaat bereikt is.

Al bij stap 1 moeten leerlingen zich afvragen of zij de begrippen inderdaad op de juiste wijze interpreteren. Na de keuze voor een model, zal regelmatig reflectie nodig zijn om er zeker van te zijn dat het goede model gekozen is. Daar komt bij dat economen nogal slordig zijn met hun taal, (3) Zo kan de naam van een grootheid veranderen tijdens het vraagstuk: de ‘verkoopprijs’ verandert in de ‘prijs’ of de ‘nettowinst’ verandert in ‘gewenste winst’. Ook kan halverwege het oplossingsproces een term anders bedoeld blijken te zijn, dan een leerling meende te mogen aannemen vanuit een vorig vraagstuk.

Voorts kan het gebeuren dat de auteur de betekenis van een term verandert tijdens het vraagstuk zelf of hij gebruikt de term als homoniem. Bijvoorbeeld: ‘restwaarde = restwaarde – sloopkosten’ of ‘aanschafprijs = aanschafprijs + installatiekosten’, waarbij het noch bij de sloopkosten, noch bij de installatiekosten om ‘kosten’ gaat, maar om ‘uitgaven’.

De controle is ook gericht op de volgorde van de stappen en de vraag of de laatste stap inderdaad het antwoord geeft op de gestelde vraag. Voor het vaststellen of alles goed is gegaan,

is een groot aantal *controlestrategieën* beschikbaar. Deze kunnen expliciet onderwezen worden door in leerboeken niet alleen de analyse en de bewerking op te nemen, maar ook de controle.

Hoe kun je weten of je iets goed of fout hebt gedaan? Het vermogen om jezelf te controleren en te corrigeren is een deelvaardigheid van probleemoplossen die uitermate cruciaal is voor bedrijfseconomen. Er zijn maar weinig leerboeken die daar expliciet aandacht aan besteden. Eigenlijk zou die vaardigheid apart in het examenprogramma genoemd moeten zijn, zodat deze in alle boeken en ook op de examens apart aan bod zou komen.



Voor de examens betekent het dat leerlingen na afronding van een vraagstuk apart aan moeten geven hoe zij eerder gemaakt werk corrigeren. Vaak zijn toetsen en examens overladen om te voorkomen dat leerlingen tijd over hebben en dan hun werk gaan controleren en goede antwoorden in verwarring veranderen in foute antwoorden. Als een berekening goed is uitgevoerd en daarna foutief is aangepast, dan zou het een vaste regel kunnen zijn dat de leerlingen in elk geval de helft van de beschikbare punten verkrijgt. Dat geeft ruimte om controleren tot een expliciet examenonderdeel te maken en om er in de voorbereiding aandacht aan te besteden.

Stap 6: Evaluatie

De belangrijkste stap van het probleemoplossen blijft meestal achterwege. Dat is de evaluatie, ofwel de vraag ‘Wat heb ik geleerd van dit vraagstuk?’ Wat voor zin heeft het om vraagstukken te maken als je jezelf niet afvraagt wat dat vraagstuk aan je kennis heeft toegevoegd? Sommen maken zonder evalueren betekent dat de docerstrategie erop gericht is dat leerlingen stilzwijgend en half onbewust de goede conceptuele structuren in hun hoofd opbouwen. Die veronderstelling is niet correct (Vernooij (4))

Leerlingen leggen allerlei verbanden tussen grootheden, ook als die verbanden er niet zijn. Soms hebben leerlingen een *dubbele begripsstructuur*, doordat zij de betekenis vanuit het alledaagse spraakgebruik hanteren naast de economische betekenis. Soms herdefiniëren ze grootheden naar believen als ze denken daarmee meer samenhang tot stand te brengen tussen die vloed aan losse termen. Op korte termijn lijkt het alsof het leerproces succes heeft, maar als een ander thema aan bod komt, gaan leerlingen met terugwerkende kracht hun begrippen herdefiniëren, zonder dat zij zich dat bewust zijn.

Het is de taak van de coach om te helpen bij het evalueren van nieuwe kennis. Samenhang zoeken en integratie tot stand brengen zijn processen die veel essentiëler zijn dan nieuwe kennis toevoegen. De coach kan mentale processen bespreekbaar maken en vaardigheden bijbrengen in het ordenen en het uitbouwen van kennis. Dat begint al door te zeggen dat leerlingen na afloop van een berekening die correct is uitgevoerd, alle getallen uit de berekening weg kunnen halen. Die zijn niet meer van belang. De getallen staan voor grootheden die er achter verscholen gaan. Die grootheden moeten leerlingen onthouden door ze te ordenen in modellen. *'Mental mapping'* heet dat.

Een vraagstuk dat een staffeltje oplevert, is hetzij een herhaling van iets dat al bekend was, of een uitbreiding van aanwezige kennis. Het is belangrijk om alleen al dat onderscheid te maken en leerlingen te vragen of ze meer weten dan bij aanvang van het vraagstuk. Daar zit de modernisering van het leerproces: *expliciet maken wat tot nu toe impliciet moest gebeuren en wat daardoor vaak achterwege bleef of incorrect verliep*. Eigenlijk zouden auteurs van leerboeken expliciet moeten vragen naar de evaluatie. Dat hoeft niet bij alle vraagstukken te gebeuren, maar zo af en toe zou het toch goed zijn.

Voetnoten

(Terug naar het begin)

1. Examenprogramma Management en Organisatie, SLO, 1996.
2. Zie voor een overzicht van veel voorkomende modellen: bedrijfseconomische-modellen.nl.
3. Zie voor een overzicht van veel voorkomende homoniemen, synoniemen en misconcepties: bedrijfseconomische-begrippen.nl.
4. Vernooij, A. T. J. (1993). Het leren oplossen van bedrijfseconomische problemen. Didactisch onderzoek naar kostprijs- en nettowinstvraagstukken in het voortgezet onderwijs. Rotterdam: dissertatie.

De illustraties in dit artikel zijn overgenomen uit het oorspronkelijke artikel uit 2003

Toelichting op het herschrijven

(Terug naar het begin)

Oorspronkelijk is dit artikel verschenen in het Tijdschrift voor het Economisch Onderwijs, nr 3, uit 2003, p. 171-181 ([Zie hier het originele artikel](#)). Door de omzetting van het vak “Management & Organisatie” naar “Bedrijfseconomie” (of eigenlijk Bedrijfseconomie, Ondernemerschap en Financiële Zelfredzaamheid) is het artikel aangepast om zijn actualiteit te behouden.

Opvallend is dat de kennis van strategieën om problemen op te lossen reeds beschreven stond in het examenprogramma voor het vak M&O ([zie bijlage](#)), maar met de komst van het nieuwe programma Bedrijfseconomie is deze beschrijving achteloos ter zijde geschoven. De bouwstenen voor een systematische probleemaanpak zijn dus niet langer beschikbaar in de vorm van eindtermen voor het lesprogramma. Dit artikel dat oorspronkelijk een toelichting daarop was, biedt alsnog de opening om een systematische probleemaanpak toe te passen.

Zie voor nadere info over de omzetting: [Bedrijfseconomie, Ondernemerschap & Financiële zelfredzaamheid: Terug naar de vorige eeuw?](#), TEO, nr 1 uit 2015.

Bijlage 1: Strategische vaardigheden

Oorspronkelijk opgesteld voor het examenprogramma M&O HAVO/VWO

15. De leerlingen kunnen volgens de hierna beschreven systematiek in duidelijke bewoordingen aangeven hoe zij een vraagstuk stapsgewijze aanpakken.
16. **Stap 1: Oriëntatie**
Gegeven een vraagstuk dat termen bevat die behandeld zijn, kunnen leerlingen de semantische betekenis van de termen aangeven en daarmee een correcte inhoudelijke beschrijving geven van de probleemstelling van het vraagstuk.
17. **Stap 2: Analyse**
Gegeven de in bijlage 2 omschreven modellen kunnen leerlingen aan de hand van één of meer signaalwoorden vaststellen welk model aan een specifiek vraagstuk ten grondslag ligt. Indien de signaalwoorden verwijzen naar verschillende modellen kunnen zij aangeven welk model zij als referentiekader kiezen. Na de keuze van een model kunnen zij aangeven welk fragment uit het model van toepassing is op een bepaald vraagstuk en welke variatie op een model daarbij eventueel speelt.
18. **Stap 3: Planning**
Na de vaststelling van de samenhang tussen de onbekende grootte en de data kunnen de leerlingen op twee verschillende wijzen een planning van het oplossingsproces maken door de stappen te benoemen die successievelijk moeten worden uitgevoerd, onder vermelding van de te berekenen tussenresultaten en/of door een vergelijking af te leiden onder weglating van de tussenresultaten.
19. **Stap 4: Berekening**
Na de vaststelling van een stapsgewijze planning van de oplossing (c.q. het oplossingspad) kunnen leerlingen de uitkomst van een vraagstuk op twee wijzen vaststellen: door de uitkomst te berekenen, als voor alle grootheden de bijbehorende waarden bekend zijn, of door een formule af te leiden, als voor de grootheden alleen parameterwaarden gegeven zijn.
20. **Stap 4 (alternatief): Berekening via een formule**
Na de keuze voor een formule die de samenhang tussen de data en de onbekende aangeeft, kunnen leerlingen de geldigheid van de formule verifiëren en vervolgens de onbekende grootte berekenen via substitutie van de parameters met de waarden die in een bepaald vraagstuk beschikbaar zijn gesteld.
21. **Stap 5: Controle**
Tijdens de hantering van deze probleemaanpak kunnen leerlingen onder woorden brengen hoe zij het vraagstuk aangepakt hebben en hoe zij de afzonderlijke stadia doorlopen hebben, waarmee zij aangeven hoe een proces van sturing en bijsturing (monitoring) tot stand is gebracht.
22. **Stap 6: Evaluatie**
Na afronding van een oplossingsproces kunnen leerlingen aangeven welke kennis zij hebben opgedaan die bruikbaar is in volgende vraagstukken en kunnen zij aangeven welke gevolgen dit heeft voor de voorstelling die zij zich al eerder gemaakt hadden van de bedrijfseconomische problematiek.

Fons Vernooij was hoofddocent Accounting bij de Vrije Universiteit. Voorheen was hij docent in het voortgezet onderwijs in Zaandam en Sassenheim en hij was vakdidacticus bedrijfseconomie aan het Instituut voor de Lerarenopleiding. In 1993 deed hij een promotieonderzoek naar probleemoplossen als vaardigheid. Daarna was hij lid van de Vakontwikkelgroep Economie die destijds de examenprogramma's voor het vak M&O formuleerde.

Het proefschrift van Fons Vernooij kun je hier [downloaden](#). Het is opgesplitst in afzonderlijke hoofdstukken en bijlagen. De vakdidactische ontdekkingen van het promotieonderzoek staan in losse thema's beschreven op de site [vakdidactiek-bedrijfseconomie.nl](#). De kern is dat onderwerpen zijn uitgesplitst naar:

- kennis van situaties
- kennis van begrippen
- kennis van procedures
- kennis van strategieën.

In het onderzoek kwam o.a. naar voren dat economen erg slordig zijn met hun woordgebruik, mede doordat er veel subdisciplines zijn met hun eigen jargon en tradities. Dit resulteerde in de website [bedrijfseconomische-begrippen.nl](#) voor tablets en [bedrijfseconomischebegrippen.nl](#) voor smartphones.

Om een beeld te geven van de verschillende modellen die onuitgesproken in de vraagstukken voorkomen, is de website [bedrijfseconomische-modellen.nl](#) ontwikkeld. Daar staan veel schema's weer gegeven waarin het gebruik van de termen is vorm gegeven. Drie van deze schema's staan in het bovenstaande artikel, maar er staan veel meer schema's uit de Bedrijfseconomie op deze site, o.a. de uitsplitsing van het bedrijfsresultaat in talloze onderdelen.