

Zoekstrategieën bij het oplossen van vraagstukken

A.T.J. Vernooij

Jaren geleden deed een leerlinge uit 5 VWO een uitspraak die mij nog regelmatig bezig houdt. Zij zei: "Als u de opgave uitlegt, begrijp ik het volledig, maar als ik zelf de oplossing moet bedenken, weet ik niet waar te beginnen." Kennelijk was het niet voldoende om de uitwerking van een vraagstuk voor te doen. De vraag waar leerlingen voor staan als zij hun huiswerk gaan maken, is niet zozeer: "Hoe luidt het oplossingspad?", als wel "Hoe zoek ik een oplossingspad?"

Bij het uitleggen van een opgave hebben docenten een voorsprong op leerlingen. Docenten hebben het oplossingspad (het algoritme) in hun hoofd zitten of beschikken over een uitwerkingenboek waarin de oplossing beschreven staat. Zij weten waar zij moeten beginnen en welke stappen geleidelijk naar de uitkomst leiden. Maar leerlingen die thuis huiswerk maken, zitten in een andere situatie. Zij hebben zoekstrategieën (heuristieken) nodig om een ingang te vinden in de probleemsituatie.

Geïnspireerd door Mettes en Plot, met hun onderzoek naar een Systematische Probleem Aanpak en door het werk van Van Parreren (o.a. *Leren op School*) en Anne van Streun (*Heuristisch wiskunde – onderwijs*) heb ik enige tijd geleden eens een klein onderzoekje gedaan. Daarvoor koos ik een groep van circa honderd studenten aan de Economische Faculteit van de UvA. Ik legde hun een opgave voor en vroeg hen alert te zijn op de wijze waarop zij gezocht hadden naar de oplossing van het vraagstuk. De probleemstelling luidde dus: "Hoe zoek je het oplossingspad als je nog niet weet hoe dat oplossingspad luidt?". Dit leverde een reeks van zoekstrategieën op, die in dit artikel succesievelijk aan de orde komen.

De gekozen opgave luidt als onderstaand. Om te benadrukken dat het niet op de uitkomst ging, kregen zij die op voorhand cadeau.

Een ondernemer verwacht dat hij f 150.000 aan integrale kosten heeft voor de produktie van 2.000 eenheden produkt. Bij een produktie van 3.000 eenheden verwacht hij f 175.000 aan kosten. Hij neemt aan dat de variabele kosten rechtevenredig toenemen met de produktieomvang. Hoe groot is

de standaardkostprijs indien zijn normale produktie 2.500 eenheden bedraagt? (Uitkomst: $f65,-$)

De geïnventariseerde zoekstrategieën

1. De situatie – analyse

Een paar studenten waren begonnen met het combineren van opvallende gegevens:

1. Er is een toename in de integrale kosten. Die zal niet voor niks gegeven zijn. Die stijging komt overeen met de stijging van de variabele kosten.
2. Voorts stijgt de produktie. Dat hangt samen met de stijging in de kosten. Dus er zal een relatie bestaan tussen die twee veranderingen. 1.000 extra eenheden kosten f 25.000 meer. Dat is f 25 per eenheid.
3. Die f 25 per eenheid hangt samen met de stijging van de produktie. Het zijn dus de gemiddelde variabele kosten (GVK). Dan moet dit het aandeel van de gemiddelde variabele kosten in de standaardkostprijs zijn.
4. Etc.

2. De grafische benadering

Een student merkt op dat de oplossing te vinden is door een grafiek te tekenen. Hij had de uitkomst niet berekend, maar had zich beperkt tot het ontwikkelen van een oplossingsplan.

1. In de grafiek kon de produktie op de x -as en de corresponderende kosten op de y -as gezet worden. Vervolgens kan door deze twee punten een lijn getrokken worden.
2. Het snijpunt van de lijn met de Y -as levert het bedrag van de totale constante kosten (TCK) op.
3. Deling van dit bedrag door de normale produktie levert dan het aandeel van de constante kosten in de standaardkostprijs.
4. De hoek die de lijn met de x -as maakt, geeft de variabele kosten aan.

3. De wiskundig – analytische methode

Een paar studenten zagen in deze opgave een rechte lijn met twee punten. Zij zochten naar een vertaling van het probleem in termen van een wiskundig analytische vorm:

1. (a) f 150.000 = 2.000 $\times$ GVK + TCK
(b) f 175.000 = 3.000 $\times$ GVK + TCK

2. Door (b) van af te trekken ontstaat:
 $1.000 \text{ GVK} = f 25.000$ dus GVK is $f 25$ en
 $\text{TVK} = f 150.000 - 2.000 \times f 25$
3. etc.

4. a De systematische rekenmethode I

Een paar studenten was het opgevallen dat de normale productie halverwege de twee andere punten lag. Door het opzetten van een rekentabel kon op eenvoudige wijze een schatting van de tussenliggende waarde gemaakt worden.

2.000	2.500	3.000
150.000		175.000

Het ontbrekende getal is 162.500. Dat geeft als gemiddelde integrale kosten bij 2.500 stuks: $f 162.500 / 2.500 = f 65,-$. Dit komt overeen met de standaardkostprijs.

4. b De systematische rekenmethode II

Een andere variant die tot de systematische rekenmethode behoort, geeft het volgende resultaat:

De gemiddelde kosten bij 2.000 zijn: $f 150.000 / 2.000 = f 75$

De gemiddelde kosten bij 2.500 zijn:

De gemiddelde kosten bij 3.000 zijn: $f 175.000 / 3.000 = f 55$

Een snelle, maar foutieve redenering leidt in dit bijzondere geval door dom toeval ook tot de goede uitkomst. Aangezien 2.500 halverwege 2.000 en 3.000 ligt, zou de standaardkostprijs ook halverwege $f 75$ en $f 55$ moeten liggen en dus $f 65$ moeten zijn. Deze redenering is niet correct, want de curve van de gemiddelde constante kosten is een hyperbool, dus lineaire interpolatie is niet toegestaan. Dat blijkt indien ter controle de gemiddelde totale kosten berekend worden bij een omvang van 2.250 stuks. Deze zijn dan niet $f 70$, maar $f 156.250 / 2.250 = f 69,40$.

5. De formule strategie

Enkele studenten grepen terug op de formule die bekend is voor de berekening van de standaardkostprijs. Deze luidt:

$$\text{SKP} = \frac{C}{N} + \frac{V}{W} \text{ en is dus: } \frac{C}{2.500} + \frac{V}{2.000}$$

Aangezien $V = \text{TIK} - C$

$$\text{is SKP} = \frac{C}{2.500} + \frac{150.000 - C}{2.000}$$

Zodra C bekend is, kan de SKP berekend worden. Nu is $C = T - V = 150.000 - 2.000 \times \text{GVK}$

$$\text{En GVK} = \frac{\text{TVK}}{q} = \frac{\text{verandering in TVK}}{\text{verandering in } q} =$$

$$\frac{\text{verandering in TIK}}{\text{verandering in } q} = \frac{25.000}{1.000} = f 25,-$$

Dus $C = f 150.000 - 2.000 \times f 25,- = f 100.000$. Dit kan ingevuld worden in de formule van de SKP.

6. De doel – middelen – analyse

Aangezien in de colleges reeds enkele malen de mogelijkheid van een doel – middelen – analyse aan de orde was geweest, kwamen er ook studenten met een degelijke benadering (zie schema 1).

Substitutie van de gegevens aan de basis van alle takken van de boom levert een flowchart op voor de oplossing van dit vraagstuk. Eventueel kan uit dit schema eerst een oplossingspad (algoritme) afgeleid worden:

1. Bereken de toename in de integrale kosten
2. Bereken de toename in de productieomvang
3. Bereken de gemiddelde variabele kosten als het quotiënt van deze twee
4. Bereken de totale variabele kosten voor periode 1 door de gemiddelde variabele kosten te vermenigvuldigen met de productie uit periode 1
5. etc.

7. De reconstructie – methode

Een student begon bij het eindpunt en trachtte van daaruit te reconstrueren hoe het oplossingspad verlopen moest zijn. In deze opgave is de uitkomst bekend. Van daaruit kun je terugredeneren naar de vermoedelijke oplossingswijze. Uit de uitkomst reconstrueer je het oplossingspad.

1. De uitkomst is $f 65,-$ Dus bij 2.500 eenheden is de Standaardkostprijs $f 65$. De totale kosten zijn dan $2.500 \times f 65 = 162.500$
2. Om het oplossingspad te vinden moet je dus de weg zoeken naar het getal $f 162.500$.
3. $f 162.500$ is het getal halverwege $f 150.000$ en $f 175.000$. Aangezien 2.500 halverwege 2.000 en 3.000 ligt, is het aannemelijk dat het oplossingspad hierlangs loopt.
4. Etc.

De niet – aangegeven zoekstrategieën

Bij de inventarisatie van de oplossingsstrategieën kwamen een aantal strategieën aan de orde. Maar

er zijn nog meer strategieën denkbaar en wellicht ook bewust of onbewust toegepast. Het spreekt voor zich dat de geschiktheid van zoekstrategieën sterk gebonden is aan het type opgave en aan de context waarin deze wordt aangeboden. De behandelde theorie, al dan niet geïllustreerd met een voorbeeld van de berekeningsprocedures, kan mede van belang zijn voor de zoekstrategie die men kiest.

8. De voorbeeldstrategie

Een student kan eventueel op zoek gaan naar een voorbeeld dat eerder is behandeld. Zo'n voorbeeld zal eenzelfde oplossingspad hebben, maar het zal uitgewerkt zijn met een andere getallenset. Het is dan de kunst om door de getalsmatige uitwerking heen te kijken en de stappen te achterhalen die succesvoller zijn worden uitgewerkt. Dit algoritme dient dan toegepast te worden in de nieuwe opgave.

In het bovenstaande voorbeeld zou dat leiden tot het volgende oplossingspad:

1. Bereken eerst de toename in de integrale kosten
2. Bereken dan de toename in de produktieomvang
3. Bereken vervolgens de gemiddelde variabele kosten als het quotiënt van deze twee
4. Etc.

9. De herinneringsstrategie

Bij sommige opgaven is het mogelijk om het oplossingspad uit het hoofd te leren. De eerder omschreven stappen 1 t/m 3 etc. kan iemand ook uit zijn geheugen opdiepen. Aan de hand van de correcte herinnering kan het oplossingspad achterhaald worden.

De herinneringsstrategie is goed bruikbaar op het proefwerk of tentamen. Door het bestuderen van een reeks opgaven heeft een leerling een arsenaal aan oplossingspaden bestudeerd en met meer of minder succes kan hij deze in zijn herinnering terugroepen. Voor het huiswerk ligt de voorbeeldstrategie meer voor de hand. Thuis heb je boeken en schriften die je open kunt slaan. Die strategie mag doorgaans niet op het proefwerk toegepast worden. Dit impliceert dat leerlingen die thuis met de voorbeeldstrategie werken andere zoekstrategieën leren dan ze op het proefwerk kunnen gebruiken.

10. De overschrijfstrategie

Alhoewel mijn studenten uit de groep waar ik het onderzoekje hield deze zoekstrategie niet noemden, is het overschrijven van de gezochte uitwerking toch een veelgebruikte methode. In plaats van

het oplossingspad te vinden door zelf op zoek te gaan, kun je het ook achterhalen door het over te nemen. Dit is de snelste methode om het algoritme te achterhalen.

Hoe verderfelijk deze methode ook moge lijken, het meeste gebruik ervan wordt vermoedelijk gemaakt door de docent. Menig docent (en ik heb me daar zelf ook schuldig aan gemaakt) stapt met zijn uitwerkingenboekje in de hand, de klas in. Hij vraagt de leerlingen of ze erin geslaagd zijn een oplossing voor het vraagstuk te vinden en demonstreert vervolgens voor een volle klas, dat zijn zoekstrategie bestaat uit het overschrijven van het oplossingspad.

11. De afwachtstrategie

Een effectief middel van leerlingen tegen de overschrijfstrategie van de docent is de strategie om af te wachten tot het vraagstuk besproken wordt. Als veel leerlingen roepen dat ze het oplossingspad niet kunnen vinden, schrijft de docent in zijn ijver het oplossingspad op het bord. Daarna stappen de leerlingen over op de zojuist gedemonstreerde overschrijfstrategie en nemen de tekst van het bord over in hun schrift.

Thuis bij de voorbereiding van het proefwerk trachten zij dan met bij voorbeeld de hulp van de reconstructiestrategie te achterhalen waarom dit een correct oplossingspad is. En tijdens het proefwerk vertrouwen zij er dan op dat de herinneringsstrategie uitkomst biedt.

Een lijstje met zoekstrategieën

In de tijd dat ik les gaf op het VWO maakte ik er wel eens een sport van om onvoorbereid voor de klas te verschijnen. Vooral als ik wist dat ik een paar flinke sommen als huiswerk meegegeven had. Dan moest ik voor een volle klas de oplossing zien te vinden met mijn uitwerkingenboek dicht op tafel. Als een strateeg zocht ik naar aangrijpingspunten om een begin van een oplossing te vinden. En als ik twijfelde aan mijn aanpak, speelde ik mijn onkunde uit met de vraag: "Als je nou niet weet hoe je de oplossing moet vinden, waar begin je dan te zoeken?" Gezamenlijk zochten we dan naar een goede aanpak van het vraagstuk.

Nu weet ik dat ik dit vaker had moeten doen. Vaker en vooral bewuster. Samen zoeken naar een oplossingspad. Vragen herformuleren, invalshoeken aftasten, problemen splitsen in deelproblemen, zoekstrategieën ontwikkelen, meer tijd nemen om mijn eigen zoekproces onder woorden te brengen.

Want dat is wat leerlingen het hardste nodig hebben. Natuurlijk kan een docent niet ieder vraagstuk voor het bord zo grondig aanpakken. Daarvoor ontbreekt hem de tijd en bovendien zal het voor de leerlingen die de huiswerkopgaven wel konden maken een te grote vertraging geven. Maar af en toe is het zeer nuttig, zodat leerlingen leren om de vaardigheden te ontwikkelen die zij thuis nodig hebben om hun huiswerk te maken.

Er is nog een reden die de toepassing van deze aanpak belemmert. In de huidige schoolcultuur waar de docent gezien wordt als deskundige die altijd de uitwerking paraat heeft, past het niet om te zeggen dat je het oplossingspad niet weet. En zeker beginnende docenten moeten hun deskundigheid bewijzen door achteloos de uitwerking op het bord te zetten. Deskundigheid bestaat vanuit dit perspectief meer uit het beschikken over "een grote zak met algoritmes", dan uit het beschikken over een reeks zoekstrategieën. Voorzichtigheid is derhalve geboden.

Toch moet het mogelijk zijn om met de bovenstaande rijkdom aan zoekstrategieën leerlingen hulpmiddelen te geven bij het zoeken naar een begin van oplossing. De hier besproken opgave was natuurlijk niet toevallig gekozen. Het was mij niet onbekend dat er een groot aantal zoekstrategieën bruikbaar was, al vermoedde ik niet dat het er zoveel zouden zijn. In andere opgaven zal dat ongetwijfeld anders liggen. Uit het hier besproken repertoire zal dan slechts een deel bruikbaar zijn.

Het is overigens niet zo dat alle zoekstrategieën even succesvol zijn. Sommige strategieën vereisen meer inzicht in het economisch verschijnsel, zoals de situatie-analyse, die bij uitstek een relatie legt tussen het rekentechnische deel en de samenhang tussen de begrippen. Andere strategieën kunnen los van het economisch inzicht gehanteerd worden, zoals de gepresenteerde systematische rekenmethoden en de wiskundig analytische methode. Bij een andere economische samenhang kan men met die strategieën eerder in de fout gaan. Het gaat op dit moment te ver om tot een uitvoerige onderlinge vergelijking te komen. Nader onderzoek is gaande naar de bruikbaarheid en effectiviteit van de diverse zoekstrategieën. Over de resultaten van dat onderzoek zal ik t.z.t. gaarne rapporteren.

Wel kan op dit moment gewezen worden op een belangrijke karakteristiek in zoekstrategieën. Sommige strategieën zijn gebaseerd op een aanpak waarbij eerst vanuit het gevraagde een oplossingsplan wordt beredeneerd. Vervolgens wordt dit

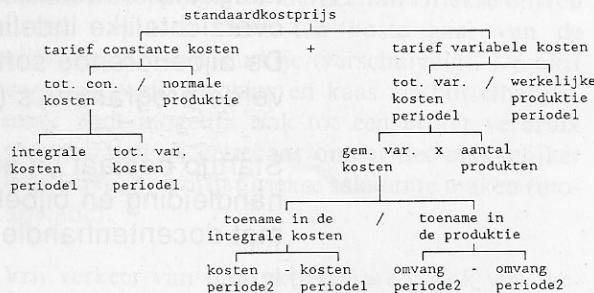
plan ten uitvoer gebracht, zoals bij voorbeeld in de doel – middelen – analyse. Dit staat in de onderwijskunde bekend als "backward reasoning en forward processing". Andere strategieën beginnen direct met stukjes van de opgave op te lossen in de hoop toevallig bij het gevraagde uit te komen, zoals bij voorbeeld de situatie – analyse. Dit staat bekend als "forward reasoning".

Mogelijk schuilt er in dit onderscheid een bron van verwarring voor leerlingen. Het zou wel eens zo kunnen zijn dat leerlingen "forward reasoning" verwarren met "forward processing". "Forward processing" betekent dat een bekend oplossingspad wordt uitgewerkt in een berekening. Als de docent niet aangeeft hoe hij aan een oplossingspad komt, maar het gewoonweg voorrekenet dan zouden de leerlingen dit op kunnen vatten als "forward reasoning". Het opschrijven van een bekend algoritme wekt dan de suggestie dat het gaat om een zoekstrategie. Leerlingen nemen een uitwerkingsstrategie dan over als zoekstrategie en lopen vast als ze deze toepassen in situaties waarin hun het oplossingspad onbekend is.

In dit artikel heb ik volstaan met het aanreiken van een simpel lijstje met beschikbare zoekstrategieën. Indien leerlingen over een dergelijk lijstje beschikken, kunnen zij daaraan steun ontleenen als zij niet weten hoe zij een vraagstuk aan moeten pakken. Door dit lijstje in de klas regelmatig te gebruiken, kan de gebruikswaarde stijgen. Wellicht dat u dan niet in de situatie komt, dat een leerling zegt: "Als u de opgave uitlegt, begrijp ik het volledig, maar als ik zelf de oplossing moet bedenken, weet ik niet waar te beginnen."

SCHEMA 1:

DOEL-MIDDELEN-ANALYSE VAN DE STANDAARDKOSTPRIJS-BEREKENING



Literatuur:

- Goffree, F., Rekenen, Realiteit en Rationaliteit, rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar aan de UvA, mei 1986.
- Hove, J.R. ten en A.T.J. Vernooij, "De Zes

Talen van de Wiskunde'', TEO, november, 1986 – 9, blz 265.

— Mettes C.T.C.W. en A. Pilot, Over het leren oplossen van natuurwetenschappelijke problemen, Een methode voor ontwikkeling en evaluatie van onderwijs toegepast op een cursus Thermodynamika, proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor in de technische wetenschappen, (Technische Hogeschool Twente), 1980.

— Parreren, C.F. van en J.A.M. Carpay, Sovjetpsychologen over onderwijs en cognitieve ontwikkeling, (Wolters Noordhoff), Groningen, Tweede grondig bewerkte druk, 1980.

— Parreren, C.F. van, Leren op school, (Wolters Noordhoff), Groningen, elfde druk, 1982.

— Polya, G. How to solve it, A new aspect of mathematical Method, (Doubleday Anchor Books, Doubleday & Company) Garden City, New York,

1945/1957.

— Schouten – Van Parreren, M.C. en C.F. van Parreren, Onderwijsproceskunde, Leerpsychologie en onderwijs 5, (Wolters Noordhoff), Groningen, 1981, ISBN 90 01 42118 0.

— Streun, A. van, ''De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties, Nieuwe Wiskrant 1983; nr 4.

— Streun, Anne van, Heuristisch Wiskunde – onderwijs, Proefschrift ter verkrijging van het doctoraat in de wiskunde en natuurwetenschappen aan de Rijksuniversiteit Groningen, 1989.

— Vernooij, A.T.J., ''De analyse van een bedrijfs-economisch vraagstuk'', TEO, mei 1989.

— Vernooij, A.T.J., ''De bepaling van de economische Levensduur, een didactische analyse'', TEO, april 1990